

## 6. Übungsblatt

### „Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt“

Abgabe bis Mittwoch 03.06.15 in der Vorlesungspause

---

#### 1. (Wettermodell)

*Diese Aufgabe zählt doppelt!*

Im Folgenden betrachten wir das Wettermodell aus dem Abschnitt 4.2, d.h. wir betrachten eine zeitlich homogene Markovkette  $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$  mit den Zuständen 0 (= Regen) und 1 (= Sonnenschein). Die Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1 - p_{10} \end{pmatrix}, \quad 0 < p_{01}, p_{10} < 1.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$P^n = \frac{1}{p_{01} + p_{10}} \begin{pmatrix} p_{10} & p_{01} \\ p_{10} & p_{01} \end{pmatrix} + \frac{(1 - p_{01} - p_{10})^n}{p_{01} + p_{10}} \begin{pmatrix} p_{01} & -p_{01} \\ -p_{10} & p_{10} \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ .

b) Bestimmen Sie zunächst allgemein die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$A = \{\text{in 100 Tagen regnet es}\} = \{X_{100} = 0\},$$

$$B = \{\text{in einem Jahr regnet es 3 Tage hintereinander}\} = \{X_{365} = X_{366} = X_{367} = 0\},$$

jeweils unter der Annahme, dass es heute regnet ( $= \{X_0 = 0\}$ ) bzw. dass heute die Sonne scheint ( $= \{X_0 = 1\}$ ). Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten für die konkreten Parameter  $p_{01} = 0.4$  und  $p_{10} = 0.3$ .

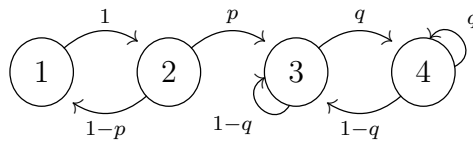
c) Eine invariante Verteilung  $\pi$  der Markovkette löst die Gleichung

$$\pi P = \pi.$$

Mit anderen Worten ist  $\pi$  linksseitiger auf Länge 1 normierter Eigenvektor von  $P$  zum Eigenwert 1. Weil  $\pi$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss  $\pi$  positive Einträge haben und die Summe der Einträge muss 1 sein. Bestimmen Sie die invariante Verteilung für unser Wettermodell. Ist diese eindeutig?

## 2. (Klassen und invariante Verteilungen)

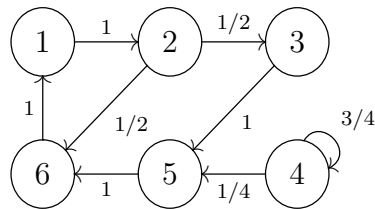
Sei die folgende Markovkette gegeben:



Geben Sie in Abhängigkeit von  $p, q \in [0, 1]$  die wesentlichen und unwesentlichen Klassen der Markovkette an und diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit invarianter Verteilungen.

## 3. (Eigenschaften einer Markovkette)

Sei  $X$  eine stationäre Markovkette auf  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  mit graphischer Darstellung:



Bestimmen Sie:

1. die Übergangsmatrix von  $X$ ,
2. die Klassen von  $S$ , und
3. alle invarianten Verteilungen.