

Skript zur Vorlesung

Wahrscheinlichkeitstheorie II

von

Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm

!!! Diese Version des Skripts ist noch nicht authorisiert !!!

!!! Das Skript bedarf noch einiger Überarbeitung !!!

Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

I	Martingale in diskreter Zeit	5
1	Bedingte Erwartungen	6
2	Martingale	15
3	Stoppzeiten	22
4	Martingal-Ungleichungen	26
5	Martingal-Konvergenzsätze	30
II	Allgemeine stochastische Prozesse	38
6	Stochastische Prozesse und kanonische Versionen	39
7	Projektive Limiten und der Konsistenzsatz von Kolmogorov	43
8	Stetige Versionen	47
9	Gauß-Prozesse	52

III	Markov-Prozesse	59
10	Markov-Kerne und Markov-Übergangsfamilien	60
11	Faltungshalbgruppen und Lévy-Prozesse	65
12	Markov-Prozesse	72
IV	Brownsche Bewegung	80
13	Definition und Konstruktion der Brownschen Bewegung	81
14	Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung	90
15	Das Invarianzprinzip	98
V	Anhang	107
16	Maße auf topologischen Räumen	108
17	Operator-Halbgruppen	120

Literatur W-Theorie II

- Bauer, “W-Theorie“ de Gruyter
- Karatzas / Shreve:
“Brownian Motion and stochastic calculus“
Springer Jhg 88, 2. Auflage derzeit
- Revuz / Yor:
“Continuous Martingales and Brownian Motion“
Springer Jhg 91/? → Paperback

Teil I

Martingale in diskreter Zeit

Kapitel 1

Bedingte Erwartungen

Gegeben (Ω, \mathcal{A}, P) und σ -Algebra $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, ZV $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ [oder $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ \mathcal{A} -meßbar].

Gesucht "Bestmögliche Schätzung" von X , falls nur die Information aus \mathcal{A}_0 zur Verfügung steht. Also eine \mathcal{A}_0 -meßbare ZV $X_0 : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die X "approximiert".

Beispiele 1.1.

- $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ (alle Informationen verfügbar): $X_0 = X$
- $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ (keine Information verfügbar): $X_0 = E(X)$
- $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ mit $B \in \mathcal{A}; 0 < P(B) < 1$:
Falls $\omega \in B$

$$X_0(\omega) = E(X|B) = \int X dP(\cdot|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP.$$

Falls $\omega \notin B$

$$X_0(\omega) = E(X|B^c) = \int X dP(\cdot|B^c) = \frac{1}{P(B^c)} \int_{B^c} X dP$$

und damit

$$X_0(\omega) = E(X|B) \cdot \mathbf{1}_B(\omega) + E(X|B^c) \cdot \mathbf{1}_{B^c}(\omega)$$

$\Rightarrow X_0$ ist \mathcal{A}_0 -meßbare ZV $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

X_0 heißt "elementare bedingte Erwartung" von X .

- $\mathcal{A}_0 = \sigma(B_i : i \in \mathbb{N})$ mit $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ disjunkte Zerlegung mit $P(B_i) > 0$.

$$\Rightarrow X_0(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} E(X|B_i) \cdot \mathbf{1}_{B_i}(\omega)$$

Wie bekommt man X_0 bei allgemeinem \mathcal{A}_0 ?

Sei (o.B.d.A) $X \geq 0$. Dann ist $Q = X \cdot P$ ein Maß auf (Ω, \mathcal{A})
(denn: $Q(\Omega) = \int_{\Omega} X dP < \infty$).

Die Maße P und Q kann man natürlich auch auf (Ω, \mathcal{A}_0) betrachten.
Genauer: Sei P_0 und Q_0 die Einschränkung von P bzw. Q auf \mathcal{A}_0 .

- Es gilt: $Q_0 \ll P_0$,
denn $\forall B \in \mathcal{A}_0$ mit $P_0(B) = 0$ folgt $P(B) = 0$ und damit

$$Q_0(B) = Q(B) = \int_B X dP = 0.$$

- Nach Radon-Nikodym (beachte: P_0 ist endlich):

$$\exists \mathcal{A}_0\text{-meßbare ZV } X_0 \geq 0 : Q_0 = X_0 \cdot P_0.$$

Satz 1.2. X sei \mathcal{A} -meßbar und $\in \mathcal{L}^1$ oder ≥ 0 .

Dann existiert ein \mathcal{A}_0 -meßbares X_0 mit

$$(*) \quad \int_B X_0 dP = \int_B X dP \quad (\forall B \in \mathcal{A}_0).$$

Die ZV X_0 ist dadurch P -f.s. eindeutig bestimmt.

Schreibweise: $X_0 = E(X|\mathcal{A}_0)$ oder $E^{\mathcal{A}_0}(X)$

X_0 heißt (Version der) **bedingte(n) Erwartung** von X bezgl. \mathcal{A}_0 .

Beweis: O.B.d.A. $X \geq 0$.

Wähle $X_0 = \frac{dQ_0}{dP_0}$ Radon-Nikodym-Dichte auf dem Meßraum (Ω, \mathcal{A}_0) .

Dann gilt $\forall B \in \mathcal{A}_0$:

$$\int_B X_0 dP = \int_B X_0 dP_0 = \int_B dQ_0 = \int_B dQ = \int_B X dP.$$

Also (*).

Nach Konstruktion als Dichte ist X_0 P -f.s. definiert.

Ist \tilde{X}_0 weitere \mathcal{A}_0 -meßbare ZV mit (*), so folgt $\{X_0 > \tilde{X}_0\} \in \mathcal{A}_0$ und damit nach

(*): $P(X_0 = \tilde{X}_0) = 1$. □

Bedingte Erwartungen verhalten sich in vielerlei Hinsicht wie Erwartungen.

Satz 1.3. Seien X und Y ZV auf (Ω, \mathcal{A}, P) ; beide $\in L^1(P)$ oder ≥ 0 .

(i) $E^{\mathcal{A}_0}(\alpha X + \beta Y) = \alpha E^{\mathcal{A}_0}(X) + \beta E^{\mathcal{A}_0}(Y)$ f.s. (Linear).

(ii) $X \leq Y$ f.s. $\Rightarrow E^{\mathcal{A}_0}(X) \leq E^{\mathcal{A}_0}(Y)$ f.s. (Monoton),
 insbesondere $X = Y$ f.s. $\Rightarrow E^{\mathcal{A}_0}(X) = E^{\mathcal{A}_0}(Y)$ f.s.
 und $X \geq 0$ f.s. $\Rightarrow E^{\mathcal{A}_0}(X) \geq 0$ f.s..
 $|E^{\mathcal{A}_0}(X)| \leq E^{\mathcal{A}_0}(|X|)$ f.s. (Kontraktiv),
 insbesondere $E^{\mathcal{A}_0}(|E(X)|) \leq E(|X|)$ f.s..

(iii) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isotone Folge von nicht-negativen ZV. Dann gilt

$$\sup_n E^{\mathcal{A}_0}(X_n) = E^{\mathcal{A}_0}(\sup_n X_n) \quad (\text{monotone Konvergenz}).$$

Beweis: nur von (iii):

Wegen Monotonie von $E^{\mathcal{A}_0}$ ist auch $(E^{\mathcal{A}_0}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ isotone Folge nicht-negativer ZV. (bei beliebiger aber fester Wahl von Versionen und anschließender Abänderung auf P -Nullmengen).

Daher kann man in (*) den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und zum Limes übergehen. \square

Korollar 1.4. Falls $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $\varphi(X) \in L^1(P)$, so gilt

$$\varphi \circ E^{\mathcal{A}_0}(X) \leq E^{\mathcal{A}_0}(\varphi(X)) \quad (\text{Jensensche Ungleichung}).$$

Beweis:

Jedes solche φ ist darstellbar als $\varphi = \sup_n \varphi_n$ mit $\varphi_n(t) = a_n t + b_n$ (affin linear).

Ferner

$$\begin{aligned} \varphi_n(E^{\mathcal{A}_0} X) &\stackrel{(i)}{=} E^{\mathcal{A}_0}(\varphi_n(X)) &&\stackrel{(ii)}{\leq} E^{\mathcal{A}_0}(\varphi(X)) \text{ f.s.} \\ \Rightarrow \varphi(E^{\mathcal{A}_0}(X)) &&&\stackrel{(iii)}{\leq} E^{\mathcal{A}_0}(\varphi(X)) \text{ f.s.} \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 1.5.

(iv) Falls $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, so gilt:

$$E^{\mathcal{A}_1}(E^{\mathcal{A}_0}(X)) = E^{\mathcal{A}_0}(E^{\mathcal{A}_1}(X)) = E^{\mathcal{A}_1}(X) \text{ f.s.} \quad (\text{Idempotent}),$$

insbesondere

$$E(E^{\mathcal{A}_0}(X)) = E(X)$$

und $E^{\mathcal{A}_0}(X) \equiv \alpha$, falls $X \equiv \alpha$ (= Konstante)

(v) $E^{\mathcal{A}_0} = E(X)$, falls X unabhängig von \mathcal{A}_0
und $E^{\mathcal{A}_0}(X) = X$, falls X meßbar bzgl. \mathcal{A}_0 .

(vi) $E^{\mathcal{A}_0}(X \cdot Y) = X \cdot E(Y)$, falls X \mathcal{A}_0 -meßbar und $X, Y \geq 0$.

Beweis:

(iv) Aus $\int_A X_1 dP = \int_A X dP = \int_A E^{\mathcal{A}_0}(X) dP \quad (\forall A \in \mathcal{A}_1)$

folgt $E^{\mathcal{A}_1}(X) = E^{\mathcal{A}_1}(E^{\mathcal{A}_0}(X))$ f.s..

Da $E^{\mathcal{A}_1}(X)$ bereits \mathcal{A}_0 -meßbar ist, folgt $E^{\mathcal{A}_0}(E^{\mathcal{A}_1}(X)) = E^{\mathcal{A}_1}(X)$ f.s..

(v) $E^{\mathcal{A}_0}(X) = X$ klar (falls \mathcal{A} -meßbar)!

Sei X unabhängig von \mathcal{A}_0 und o.B.d.A. ≥ 0 . Dann gilt $\forall A \in \mathcal{A}_0$:

$$\int_A X dP = E(\mathbb{1}_A \cdot X) = E(\mathbb{1}_A) \cdot E(X) = \int_A E(X) dP.$$

(vi) Sei zunächst $X = \mathbb{1}_B$ mit $B \in \mathcal{A}_0$. Dann gilt $\forall A \in \mathcal{A}_0$:

$$\begin{aligned} \int_A XY dP &= \int_{A \cap B} Y dP = \int_{A \cap B} E^{\mathcal{A}_0}(Y) dP \\ &= \int_A X E^{\mathcal{A}_0}(Y) dP \end{aligned}$$

$\Rightarrow E^{\mathcal{A}_0}(XY) = X E^{\mathcal{A}_0}(Y)$ f.s., falls X \mathcal{A}_0 -meßbare Indikatorfunktion, Elementar(=Stufen)funktion

\Rightarrow (mittels Linearität): $E^{\mathcal{A}_0}(XY) = X E^{\mathcal{A}_0}(Y)$ f.s., falls X Treppenfunktion

\Rightarrow (mittels monotoner Konvergenz): $E^{\mathcal{A}_0}(XY) = X E^{\mathcal{A}_0}(Y)$ f.s., falls $X \geq 0$, \mathcal{A}_0 -meßbar. \square

Satz 1.6. (viii) Für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist $E^{\mathcal{A}_0}(X)$ die orthogonale Projektion von X auf den abgeschlossenen Untervektorraum $L^2(\Omega, \mathcal{A}_0, P)$, d.h. $E^{\mathcal{A}_0}(X)$ ist diejenige eindeutig (mod P) bestimmte ZV $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}_0, P)$, für die der Erwartungswert (=reelle Zahl!)

$$E((X - X_0)^2)$$

kleinst möglich wird.

Beweis: Anwendung der Jensenschen Ungleichung mit $\varphi(t) = t^2$ liefert für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$(E^{\mathcal{A}_0} X)^2 \leq E^{\mathcal{A}_0}(X^2) \text{ f.s.}$$

$$\Rightarrow E^{\mathcal{A}_0} X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}_0, P), \text{ denn } E((E^{\mathcal{A}_0}(X))^2) \leq E(E^{\mathcal{A}_0}(X^2)) = E(X^2) < \infty \text{ f.s. .}$$

Zu zeigen: $X - E^{\mathcal{A}_0}(X)$ orthogonal zu $L^2(\Omega, \mathcal{A}_0, P)$.

Aus (*) folgt $\forall A \in \mathcal{A}_0$:

$$\langle X - E^{\mathcal{A}_0}(X), \mathbf{1}_A \rangle_{L^2} = \int_A (X - E^{\mathcal{A}_0}(X)) dP = 0$$

D.h. X läßt sich (eindeutig) zerlegen in $X = X_0 + X_1$ mit $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}_0, P)$ und X_1 orthogonal zu $L^2(\Omega, \mathcal{A}_0, P)$. Und zwar mit

$$X_0 = E^{\mathcal{A}_0}(X).$$

Sei $X = X'_0 + X'_1$ eine weitere solche Zerlegung.

$$\Rightarrow E(X_1 - (X_0 - X'_0)) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X_1^2) &= E((X - X'_0)^2) = E((X_1 + (X_0 - X'_0))^2) \\ &= E(X_1^2) + E((X_0 - X'_0)^2) \\ &\geq E(X_1^2) \text{ und} \\ &= E(X_1^2) \Leftrightarrow X_0 = X'_0 \text{ P-f.s.} \end{aligned}$$

\Rightarrow Eindeutigkeit, kleinstmöglicher Wert $E((X - X_0)^2)$. □

Ebenso wie bedingte Erwartungen, kann man nun auch bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingte Verteilungen definieren.

(denn: $P(B) = E(\mathbf{1}_B)$ und $X(P)(B) = P(X \in B) = E(\mathbf{1}_B(X))$).

Definition 1.7. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) W -Raum und $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ σ -Algebra.

Dann heißt

$$P(B|\mathcal{A}_0) := E(\mathbf{1}_B|\mathcal{A}_0).$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von $A \in \mathcal{A}$ unter der Hypothese \mathcal{A}_0 .

Man verwendet hierfür auch die Schreibweise $P^{\mathcal{A}_0}(B)$.

Es gilt:

(i) Für jedes $B \in \mathcal{A}$ ist $P(B|\mathcal{A}_0)$ eine \mathcal{A}_0 -meßbare ZV (keine Zahl!)

(ii) $0 \leq P(B|\mathcal{A}_0) \leq 1$ f.s.
 $P(\emptyset|\mathcal{A}_0) = 0, P(\Omega|\mathcal{A}_0) = 1$ f.s.

(iii) $B_1 \subset B_2: P(B_1|\mathcal{A}_0) \leq P(B_2|\mathcal{A}_0)$ f.s.

(iv) $(B_n)_n$ disjunkt:

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n | \mathcal{A}_0\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n | \mathcal{A}_0) \quad \text{f.s.}$$

Achtung: Falls (ii)-(iv) für alle $\omega \in \Omega$ gelten würden, wäre $B \mapsto P(B|\mathcal{A}_0)(\omega)$ ein \overline{W} -Maß auf (Ω, \mathcal{A}) . (ii)-(iv) gelten jedoch nur für fast alle $\omega \in \Omega$, genauer für alle $\omega \in \Omega_1 = \Omega_1(B)$ bzw. $= \Omega_1(B_1, B_2)$ bzw. $= \Omega_1((B_n)_n)$ mit $P(\Omega_1) = 1$.

Das Ω_1 hängt dabei von den $(B_n)_n$ ab! I.a. also kein Maß!

Hinweis: Unter bestimmten Voraussetzungen existieren ausgezeichnete Versionen $P(B|\mathcal{A}_0)(\omega)$, so daß $B \mapsto P(B|\mathcal{A}_0)(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ ein W-Maß ist ("reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit", siehe Kapitel 16).

Bemerkung: Zu gegebenen (Ω, \mathcal{A}, P) und $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ existiert stets eine Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $(\omega, B) \mapsto P(B|\mathcal{A}_0)(\omega)$ als Abbildung $\Omega \times \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Unter gewissen Voraussetzungen ist eine dieser Versionen sogar eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit. Oft wird für diese reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit $(\omega, B) \mapsto P(B|\mathcal{A}_0)(\omega)$ geschrieben. Gelegentlich wird sie undifferenziert wieder als bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

Bedingte Erwartungen, Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen treten oft auf unter der Hypothese $\mathcal{A}_0 = \sigma(Y)$ mit einer ZV

$$Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{P}).$$

(d.h. \mathcal{A}_0 ist die größte σ -Algebra (= kleinste σ -Algebra), so daß $(\Omega, \mathcal{A}_0) \rightarrow (S, \mathcal{P})$ noch meßbar ist). Statt $E(X|\sigma(Y))$ bzw. $P(B|\sigma(Y))$ schreibt man einfach $E(X|Y)$ bzw. $P(B|Y)$. Hierbei ist $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine \mathcal{A} -meßbare reelle numerische ZV auf Ω und $B \in \mathcal{A}$.

Betrachten wir $E(X|Y) : (\Omega, \sigma(Y)) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ZV. Nach Faktorisierungssatz (s. Übungen zur W-Theorie I) existiert

$$g : (S, \mathcal{P}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

mit $E(X|Y) = g \circ Y$, d.h. $\omega \mapsto g(Y(\omega))$ ist eine Version der bedingten Erwartung von X unter der Hypothese Y .

Definition 1.8. Jede derartige Funktion $g : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Version der faktorisierten bedingten Erwartung von X unter der Hypothese Y** .

In Zeichen:

$$\begin{aligned} g &= E(X|Y = \cdot) \\ \text{bzw. } g(Y) &= E(X|Y = y), \\ \text{woraus folgt: } E(X|Y)(\omega) &= g(Y(\omega)) = E(X|Y = Y(\omega)) \end{aligned}$$

Bemerkung:

- (1) $g = E(X|Y = \cdot)$ ist eine ZV! Diese Funktion g ist P_Y -f.ü. eindeutig bestimmt auf (S, \mathcal{Y}) .
- (2) Für jedes $y \in S$ ist $g(y) = E(X|Y = y)$ eine Zahl!
Genannt: **bedingter Erwartungswert** von X unter der Hypothese, daß Y gleich y ist.
- (3) Diese Zahl $E(X|Y = y)$ ist nur für solche $y \in S$ eindeutig bestimmt, für die

$$P(Y = y) > 0.$$

In diesem Fall gilt

$$E(X|Y = y) = \frac{1}{P(Y = y)} \int_{\{Y=y\}} X dP.$$

Denn:

$$\begin{aligned} \int_{\{Y=y\}} X dP &= \int_{\{Y=y\}} E(X|Y) dP = \int_{\{Y=y\}} g(Y) dP \\ &= \int_{\{y\}} g(\tilde{y}) P_Y(d\tilde{y}) = g(y) \cdot P_Y(y). \end{aligned}$$

- (4) Aus der faktorisierten bedingten Erwartung $g = E(X|Y = \cdot)$ bekommt man die bedingte Erwartung zurück als

$$g(Y) = E(X|Y) \quad P\text{-f.s.},$$

d.h. man setzt in die Funktion g einfach die ZV Y ein.

- (5) Entsprechende Definitionen gibt es für faktorisierte bedingte Wahrscheinlichkeiten und faktorisierten bedingten Verteilungen.

Beispiel 1.9. Seien $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ZV mit $P_{X \otimes Y} = f \cdot \lambda^2$ mit meßbarem $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$, d.h.

$$P((X, Y) \in B) = \int \int_B f(x, y) dx dy \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$$

Sei ferner $E(|X|) = \int \int_{\mathbb{R}^2} |x| \cdot f(x, y) dx dy < \infty$
(und $f_0(y) := \int f(x, y) dx > 0$ ($\forall y \in \mathbb{R}$)). Dann gilt:

$$E(X|Y = y) = \frac{1}{f_0(y)} \cdot \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x, y) dx \quad \text{für } P_Y\text{-fast alle } y \in \mathbb{R}$$

und damit insbesondere

$$E(X|Y) = \frac{1}{f_0(Y)} \cdot \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x, Y) dx \quad P\text{-f.s.}$$

Also anschaulich:

- man kennt die Verteilung von (X, Y)
- man wartet den Ausgang des Experiments Y ab
- man möchte den Ausgang des Experiments X schätzen:
eine grobe Schätzung (unabhängig vom Ausgang von Y) wäre

$$E(X) = \int \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot f(x, y) dx dy,$$

wenn man bereits weiß, daß $Y = y$ ist, ist die beste Schätzung

$$E(X|Y = y) = \int x \cdot f_y(x) dx$$

mit der normierten Dichte

$$f_y(x) = \frac{f(x, y)}{\int f(x', y) dx'}$$

Beweis:

a) Zunächst gilt: $f_0 > 0$ P_Y -f.ü., denn $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$P_Y(A) = P(Y \in A) = \int_A f_0(y) dy = (f_0 \cdot \lambda)(A)$$

\Rightarrow Behauptung (mit $A = \{f_0 = 0\}$)

b) Ferner: $f_0 < \infty$ λ -f.s., denn $1 = P_Y(\mathbb{R}) = \int f_0(y)dy$. Insbesondere also auch $f_0 < \infty$ P_Y -f.s.

(denn $P_Y(N) = P_{X \otimes Y}(\mathbb{R} \times N) = \int \int_{\mathbb{R} \times N} f(x, y) dx dy = 0$ für alle N mit $\lambda^1(N) = 0$)

c) Definiere

$$g(y) = \left(\frac{\int x f(x, y) dx}{\int f(x, y) dx} \right) \frac{\int x f(x, y) dx}{f_0(y)}$$

für y mit $0 < f_0(y) < \infty$ und $\int x f(x, y) dy < \infty$ und beliebig sonst.

Zu zeigen ist:

$$E(X|Y) = g \circ Y \quad (*) \quad P\text{-fast sicher,}$$

d.h. $\int_B g(Y) dP = \int_B X dP \quad \forall B \in \sigma(Y)$.

Nun gilt für $B \in \sigma(Y)$, also etwa $B = Y^{-1}(A)$ mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_B g(Y) dP &= \int \mathbb{1}_A(Y) g(Y) dP \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_A g(y) f(x, y) dy dx \\ &= \int_A \left[g(y) \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_A \int_{\mathbb{R}} x f(x, y) dx dy = \int \mathbb{1}_A(Y) \cdot X dP = \int_B X dP \quad \square \end{aligned}$$

Falls X, Y unabhängig, so ist $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$\Rightarrow f_0(y) = f_2(y), f_y(x) = f_1(x)$

Kapitel 2

Martingale

a) Stochastische Prozesse

Gegeben sei ein Meßraum (E, \mathcal{B}) und eine Menge I . (Ω, \mathcal{A}, P) sei ein W-Raum.

Definition 2.1. *Ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum (E, \mathcal{B}) , Parametermenge I und zugrundeliegendem W-Raum (Ω, \mathcal{A}, P) ist eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von \mathcal{A}/\mathcal{B} -meßbaren ZV $X_t : \Omega \rightarrow E$.*

Genau genommen: $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in I}, E, \mathcal{B})$.

Also

- Für jedes $t \in I$ ist $X_t : \omega \mapsto X_t(\omega)$ eine \mathcal{A}/\mathcal{B} -meßbare Abbildung $\Omega \rightarrow E$.
- Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $X_\cdot(\omega) : t \mapsto X_t(\omega)$ eine Abbildung $I \rightarrow E$, genannt **Trajektorie** oder **Pfad**.

Meist $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ oder $I = \mathbb{R}$ oder $I = \mathbb{N}$,

$E =$ topologischer Raum, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ seine Borel- σ -Algebra.

Beispiel 2.2. $I = \mathbb{R}_+, E = \mathbb{R}^d, \Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$

$$X_t(\omega) = \omega(t)$$

Im folgenden besitze I eine Ordnungsrelation \leq (konkret: $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$).

Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ heißt **Filtration**, falls für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$ gilt:

\mathcal{F}_s und \mathcal{F}_t sind σ -Algebren auf Ω mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$.

Das Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ wird auch filtrierter W-Raum genannt.

- $(X_t)_t$ heißt **adaptiert an** (bzw. **meßbar bzgl.**) $(\mathcal{F}_t)_t$, falls X_t $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}$ -meßbar ist für alle $t \in I$.

Wichtigster Fall: gegeben $(X_t)_t$, definiere für $t \in I$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t^X &: = \sigma(X_s : s \leq t) = \mathcal{F}_t^0 \\ &= \sigma\text{-Algebra der durch } X = (X_t)_{t \in I} \text{ definierten Ereignisse}\end{aligned}$$

$(\mathcal{F}_t^X)_{t \in I} = (\mathcal{F}_t^0)_{t \in I}$ heißt **kanonische Filtration**.

Offenbar gilt: $(X_t)_t$ adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_t \Leftrightarrow \mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ (für alle $t \in I$).

Hinweis: \mathcal{F}_t^X wird erzeugt von den Mengen

$$\{X_{s_1} \in A_1, \dots, X_{s_n} \in A_n\} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t, s_i \in I, A_i \in \mathcal{B}.$$

Im folgenden sei nun stets $E = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (bzw. $E = \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$).

Definition 2.3. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt **vorhersagbar**, falls X_n meßbar bzgl. \mathcal{F}_{n-1} ist ($\forall n \geq 1$).

Definition 2.4. Zwei Prozesse $X = (X_n)_n$ und $Y = (Y_n)_n$ auf demselben W -Raum heißen **ununterscheidbar** bzw. **Modifikationen voneinander**

$$\Leftrightarrow P\text{-fast sicher: } (\forall n \in \mathbb{N} : X_n = Y_n)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (P\text{-fast sicher } X_n = Y_n).$$

Definition 2.5. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_n, P)$ heißt **vollständig**, wenn \mathcal{F}_1 alle (Ω, \mathcal{A}, P) -Nullmengen enthält.

Bemerkungen:

- (1) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_n, P)$ vollständig, dann ist $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ vollständig für alle n .
Die Umkehrung gilt i.a. nicht. Es gibt mehr \mathcal{A} -Nullmengen als \mathcal{F}_1 -Nullmengen.
- (2) Augmentieren:
Ersetze \mathcal{A} und \mathcal{F}_n durch $\bar{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$ bzw. $\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma(\mathcal{F}_n \cup \mathcal{N})$ mit $\mathcal{N} =$ Mengen der \mathcal{A} -Nullmengen
 $\Rightarrow (\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{F}}_n, P)$ vollständig.
- (3) Gelegentlich ersetzt man hierbei die \mathcal{A} -Nullmengen durch \mathcal{F}_∞ -Nullmengen mit
 $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right).$

b) Martingale

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ein filtrierter W-Raum und $(X_t)_{t \in I}$ ein adaptierter, integrierbarer (d.h. $E(|X_t|) < \infty \forall t \in I$) stochastischer Prozeß mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definition 2.6. $(X_t)_{t \in I}$ heißt **Martingal**, genauer $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ -**Martingal**, falls

$$X_s = E(X_t | \mathcal{F}_s) \quad (\text{fast sicher}) \quad \forall s, t \in I \text{ mit } s \leq t.$$

Es heißt **Supermartingal** (bzw. **Submartingal**), falls statt dessen gilt:

$$X_s \geq E(X_t | \mathcal{F}_s) \quad (\text{fast sicher}) \quad (\text{bzw. } \leq (\text{fast sicher})) \quad \forall s \leq t.$$

Merkregel: Bei einem Supermartingal liegt der jetzige (d.h. zum Zeitpunkt s) Besitz X_s über dem später (d.h. zum Zeitpunkt t) zu erwartenden Besitz $E(X_t | \mathcal{F}_s)$.

Bemerkungen:

(i) Aus (*) folgt $E(X_s) \geq E(X_t) \forall s \leq t$, d.h. $t \mapsto E(X_t)$ ist monoton fallend.
Martingale beschreiben faire Spiele, Supermartingale beschreiben reale Spiele.

(ii) (*) ist äquivalent zu: $\forall s \leq t$:

$$\int_A X_s dP \geq \int_A X_t dP \quad (\forall A \in \mathcal{F}_s).$$

(iii) (Super/Sub-) Martingaleigenschaft bleibt erhalten, wenn man \mathcal{F}_t verkleinert. (klar wegen (**)).

Sie geht i.a. verloren, wenn man \mathcal{F}_t vergrößert.

Martingale bzgl. $(\mathcal{A}_t)_{t \in I}$ sind fast sicher konstant (in t)!

Denn: $X_0 = X_s = E(X_t | \mathcal{A}) = X_t \forall t \geq s$.

Beispiel 2.7. für Martingale:

$(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ beliebiger filtrierter W-Raum, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare ZV

$$X_t := E(X | \mathcal{F}_t) \quad \text{definiert ein Martingal.}$$

(Denn: $E(X_t | \mathcal{F}_s) = E(E(X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = E(X | \mathcal{F}_s) = X_s$ für $s \leq t$.)

Stabilitätsaussagen:

(i) Mit $X = (X_t)_{t \in I}$ und $Y = (Y_t)_{t \in I}$ sind auch $\alpha \cdot X$ (für $\alpha \geq 0$), $X + Y$ und $X \wedge Y$ Supermartingale (die beiden ersten sogar Martingale, falls X, Y Martingale).

(ii) Ist $X : \Omega \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ Submartingal und $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und isoton (oder X Martingal und φ konvex), so ist

$$\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t \in I} \quad \text{ein Submartingal.}$$

Insbesondere: $X_t^+ = \sup(X_t, 0)$ und $|X_t|^p$ (für $p > 1$) definieren Submartingale, falls (X_t) Martingal ist.

Beweis durch Jensensche Ungleichung.

Beispiel 2.8.

$\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, $P = (P_0)^{\mathbb{N}}$ mit $P_0\{-1\} = P_0\{1\} = \frac{1}{2}$,

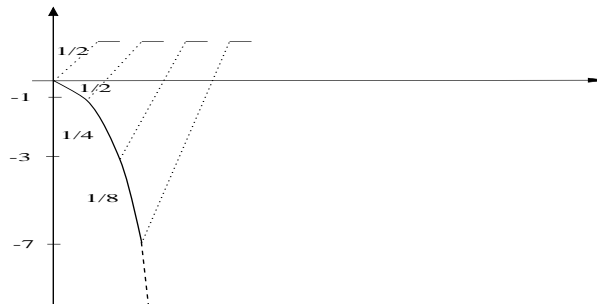
$X_n(\omega) = \omega(n)$ Ausgang des n -ten Spieles,

$$a_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls } S_{n-1}(\omega) \geq 0 \\ 2 \cdot a_{n-1}(\omega) & \text{sonst} \end{cases}, a_1(\omega) = 1 \quad \left. \vphantom{a_n(\omega)} \right\} = 2^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_i = -1\}},$$

$S_n(\omega) = S_{n-1}(\omega) + a_n(\omega) \cdot X_n(\omega)$ Gewinn nach n -ten Spiel

$S_0(\omega) \equiv 0$

$\Rightarrow P$ -fast sicher gewinnt man 1, -irgendwann



$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Martingal!

$$\begin{aligned} \text{Denn} \quad E(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(S_{n-1} + 2a_{n-1} \cdot X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= S_{n-1} + 2a_{n-1} \cdot E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= S_{n-1} + 2a_{n-1} \cdot E(X_n) = S_{n-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(S_n | \mathcal{F}_k) = S_k \quad \forall k < n.$$

Lemma 2.9. (X_n, \mathcal{F}_n) ist ein Supermartingal genau dann, wenn

$$X_n \geq E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \quad \text{fast sicher} \quad \forall n. \quad (**)$$

Beweis: Offenbar $(*) \Rightarrow (**)$ ($k = 1!$).

Umgekehrt folgt $(*)$ durch Induktion nahe k : klar für $k = 1$.

Annahme, daß richtig für $k \Rightarrow$

$$\begin{aligned} E(X_{n+k+1} | \mathcal{F}_n) &= E(E(X_{(n+1)+k} | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \\ &\leq E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n \quad \text{fast sicher} \quad \square \end{aligned}$$

Direkt:

$$\begin{aligned}
 E(X_{n+k}|\mathcal{F}_n) &= E(E(\dots E(E(X_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1})|\mathcal{F}_{n+k-2})|\dots|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_1)) \\
 &\leq E(E(\dots E(X_{n+k-1}|\mathcal{F}_{n+k-2})|\dots|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_1) \\
 &\quad \dots\dots \\
 &\leq E(X_{n+1}|\mathcal{F}_1) \\
 &\leq X_n \quad \text{fast sicher}
 \end{aligned}$$

Beispiel 2.10. $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, ξ_i unabhängig, L^1

$$X_n \text{ (Super-)Martingal} \Leftrightarrow E(\xi_i) = 0 (\leq 0)$$

Denn: $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n = E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1})$

Beispiel 2.11.

- Martingale bzgl. der konstanten Filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ sind konstant, Supermartingale bzgl. der konstanten Filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ sind fallend: $X_{n+1} \leq X_n$ fast sicher.
- Umgekehrt: Jeder fallende (bzw. konstante) Prozeß $(X_n)_n$ ist ein Supermartingal (bzw. Martingal) bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$.

Lemma 2.12. (X_n, \mathcal{F}_n) Martingal und wachsend, $E(X_1) = 0 \Rightarrow X_n \equiv 0$ fast sicher.

Beweis: Wegen wachsend ist $X_n \geq 0$.

Martingal $\Rightarrow 0 = E(X_1) = E(X_n) \Rightarrow X_n = 0$ fast sicher. □

Beispiele 2.13.

(i) (X_n, \mathcal{F}_n) (Super-) Martingal, Z_n vorhersagbar, beschränkt (≥ 0) ($\forall n$).

$$Y_n := (Z \bullet X)_n := \sum_{k=2}^n Z_k \cdot (X_k - X_{k-1}),$$

$\Rightarrow (Y_n, \mathcal{F}_n)$ (Super-) Martingal.

“ diskretes Ito-Integral“ oder “ Martingal-Transformation von X mittels Z “.

Beweis: $E(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) = E[Z_n \cdot (X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n] = Z_n \cdot E[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] = 0$

□

(ii) (X_n, \mathcal{F}_n) Martingal,

$$[X]_n := \sum_{k=2}^n |X_k - X_{k-1}|^2 \quad \text{“ diskrete quadratische Variation“}$$

$\Rightarrow X^2 - [X]$ Martingal, nämlich $= 2Y \bullet X$ mit $Y_n := X_{n-1}$.

Beweis: $X_n^2 = X_1^2 + \sum_{k=2}^n |X_k - X_{k-1}|^2 + 2 \sum_{k=2}^n X_{k-1} \cdot (X_k - X_{k-1})$ □

Ebenso $X^2 - \langle X \rangle$ Martingal mit

$$\langle X \rangle_n := \sum_{k=2}^n E[|X_k - X_{k-1}|^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$$

$$= \sum E[X_k^2 - X_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \text{ vorhersagbar.}$$

(iii) $[Z \bullet X]_n = \sum_{k=1}^n Z_k^2 \cdot |X_k - X_{k-1}|^2$

Insbesondere

$$E \left(\left[\sum_{k=1}^n Z_{k-1} \cdot (X_k - X_{k-1}) \right]^2 \right) = E \left(\sum_{k=1}^n Z_k^2 \cdot |X_k - X_{k-1}|^2 \right) \quad L^2\text{-Isometrie}$$

Satz 2.14 (Doob-Meyer). Sei (X_n, \mathcal{F}_n) Supermartingal. Dann existieren ein Martingal (Y_n, \mathcal{F}_n) und vorhersagbarer Prozeß (Z_n, \mathcal{F}_n) mit

$$X_n = Y_n - Z_n \quad , \quad Z_1 \equiv 0.$$

Die Prozesse Y und Z sind dabei eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit).

Beweis:

- Eindeutigkeit:

$$X = Y - Z = Y' - Z' \Rightarrow V = Y - Y' = Z - Z' \text{ ist Martingal und vorhersagbarer Prozeß mit } V_0 = (Z - Z')_0 = 0$$

$$\Rightarrow V \equiv 0.$$

- Existenz:

Setze $A_n := E(X_n - X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq 0$, \mathcal{F}_n -meßbar

und $Z_n := \sum_{k=1}^{n-1} A_k$ vorhersagbar, d.h. \mathcal{F}_{n-1} -meßbar.

$\Rightarrow Y_n := X_n + Z_n$ ist Martingal,

denn $E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) - Y_n = E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) + A_n = 0.$ □

Beispiel 2.15.

(ξ_n) unabhängig, $\{\pm 1\}$ -wertig, $E\xi_n = 0$, Ausgang des n -ten Spieles $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_i : i \leq n\}$

$Z_n =$ Einsatz beim n -ten Spiel, \mathcal{F}_{n-1} -meßbar,

$Y_n =$ Besitz nach n -ten Spiel $= \sum_{i=0}^n Z_i \cdot \xi_i$.

Hinweis: Sei $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \Rightarrow X$ ist Martingal.

$\Rightarrow Y = Z \bullet X$ ist Martingal egal, welche Einsätze man vorgibt!

$\Rightarrow EY_n = 0$.

Sei nun $Z_n = 2 \cdot Z_{n-1} \cdot \mathbf{1}_{\{\xi_{n-1} = -1\}} = 2^n \cdot z \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{\xi_i = -1\}}$,

$Z_0 = z$

$\Rightarrow P(Z_n = z) = 1 - 2^{-n-1} \rightarrow 1$,

$\Rightarrow P$ -fast sicher $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : Z_n = z$,

d.h. mit 100% Wahrscheinlichkeit gewinnt man schließlich!

Lemma 2.16. $(X_n)_n$ Martingal und vorhersagbar \Rightarrow fast sicher konstant.

Beweis: $X_n = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_{n+1}$ fast sicher, da X_n Martingal und vorhersagbar. □

Kapitel 3

Stopppzeiten

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ ein filtrierter W-Raum.

Definition 3.1. Eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit**, falls $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n. \quad (*)$$

Bemerkungen:

(i) Äquivalent zu (*) sind:

$$(**) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \{T = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

$$(***) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \{T \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

$$\text{Beweis: } (*) \Rightarrow (**): \{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_n$$

$$(**) \Rightarrow (*): \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{T \leq k\} \in \mathcal{F}_n$$

$$(*) \Leftrightarrow (***): \{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c \quad \square$$

(ii) Insbesondere ist dann T meßbar.

(iii) Jede konstante Zeit $T = n_0$ ist Stoppzeit.

(iv) Sind T_n Stoppzeiten und $k \in \mathbb{N}_0$, so sind auch

$$T + k, T_1 \wedge T_2, T_1 \vee T_2, T_1 + T_2, \sup_n T_n, \inf_n T_n$$

$$\{\sup_n T_n \leq k\} = \bigcap_n \{T_n \leq k\} \in \mathcal{F}_k$$

$$\{\inf_n T_n \leq k\} = \bigcup_n \{T_n \leq k\} \in \mathcal{F}_k$$

Stoppzeiten

Keine Stoppzeiten sind i.a. $T - k, T_1 - T_2$.

(v) Bei kanonischer Filtrierung $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ gilt:

$$T \text{ Stoppzeit} \Leftrightarrow \forall n : \exists A_n \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}) : \{T \leq n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in A_n\}.$$

Beispiel 3.2. (Erste Trefferzeit=Eintrittszeit): Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und

$$T(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n(\omega) \in \mathcal{A}\} \quad (\text{mit } \inf \emptyset = +\infty).$$

Dann ist T Stoppzeit.

Beweis: $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{X_k \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{F}_n$ □

Keine Stoppzeit ist i.a. die letzte Trefferzeit = Austrittszeit
 $L = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in \mathcal{A}\}.$

Lemma 3.3. Für eine Stoppzeit T und einen adaptierten Prozeß (X_n) , setze
 $\Omega_T := \{T < \infty\} \subset \Omega$, $X_T : \Omega_T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$
 und $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n\}.$

Dann gilt:

(i) \mathcal{F}_T ist σ -Algebra,

(ii) T und X_T sind \mathcal{F}_T -meßbar.

Beweis:

(i) $A_i \in \mathcal{F}_T \ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{F}_T$
 $A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_T$, denn $A^c \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} \setminus (A \cap \{T \leq n\})$.

(ii) T ist \mathcal{F}_T -meßbar, denn $\{T = k\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \ \forall n, k$.

$$X_T = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X_n \cdot \mathbf{1}_{\{T \geq n\}} \quad \text{auf } \Omega_T \text{ ist meßbar.}$$

□

Satz 3.4 (Optional Stopping - Zufälliges Stoppen).

Sei T eine Stoppzeit und $X^T := (X_n^T)_n := (X_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Mit X ist auch X^T ein (Super-) Martingal (sogar bzgl. $(\mathcal{F}_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}_0}$).

Beweis: $X^T = Z \bullet X$ mit $Z_n = \mathbf{1}_{\{n \leq T\}}$ \mathcal{F}_{n-1} -meßbar, ≥ 0
 $\Rightarrow X^T =$ (Super-) Martingal-Transformation. □

Zusatz: Ist T beschränkt, so ist $X_T \in L^1$ und $E(X_T) \stackrel{(\leq)}{=} E(X_0)$.

Beweis: T beschränkt, d.h. $\leq k \Rightarrow X_T = X_{T \wedge n} \ \forall n \geq k$ und

$$E(X_T) = E(X_{T \wedge n}) \stackrel{(\leq)}{=} E(X_{T \wedge 0}) = E(X_0) \quad \square$$

Lemma 3.5 (Doob'sches Lemma).

Seien S, T beschränkte Stoppzeiten mit $S \leq T$ und $(X_n)_n$ Supermartingal. Dann

$$E(X_T | \mathcal{F}_S) \leq X_S \quad \text{fast sicher,}$$

insbesondere $E(X_T) \leq E(X_S)$.

Beweis: Nach Optional Stopping: $X_S, X_T \in L^1$ (da S, T beschränkt $\leq k$).

Sei $Z_n := \mathbf{1}_{\{n \leq T\}} - \mathbf{1}_{\{n \leq S\}}$, \mathcal{F}_{n-1} -meßbar, beschränkt

$\Rightarrow Y := Z \bullet X$ ist Supermartingal, L^1 .

Nun ist

$$\begin{aligned} Y_n = (Z \bullet X)_n &= \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{k \leq T\}} (X_k - X_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{k \leq S\}} (X_k - X_{k-1}) \\ &= X_{T \wedge n} - X_0 - (X_{S \wedge n} - X_0) = X_{T \wedge n} - X_{S \wedge n} \end{aligned}$$

und für $n \geq k$

$$Y_n = X_T - X_S$$

$\Rightarrow E(X_T) - E(X_S) = E(Y_n) \leq E(Y_0) = 0$.

Für $A \in \mathcal{F}_S$ ist zu zeigen

$$\int_A X_S dP \geq \int_A X_T dP.$$

Setze $A = \bigcup A_i$ mit $A_i = A \cap \{S = i\} \in \mathcal{F}_i$, $i = 0, \dots, k$.

Es gilt $X_S = \sum_{i=0}^k \mathbf{1}_{\{S=i\}} X_i$, $X_T = \dots$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_A X_S dP &= \int_{A_i} X_i dP = \int_{A_i} X_{i \wedge T} dP \\ &\geq \int_{A_i} X_{(i+1) \wedge T} dP \geq \dots \int_{A_i} X_{k \wedge T} dP = \int_{A_i} X_T dP \\ \Rightarrow \int_A X_S dP &\geq \int_A X_T dP. \end{aligned}$$

□

Satz 3.6 (Optional Sampling - Zufällige Auswahl/Stichprobe).

Seien T_1, \dots, T_k beschränkte Stoppzeiten, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein (Super-) Martingal bzgl.

$(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann ist $(X_{T_n})_{0 \leq n \leq k}$ ein (Super-) Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_{T_n})_{0 \leq n \leq k}$.

Beweis:

- $T_n \leq T_{n+1} \Rightarrow \mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_{T_{n+1}},$

- X_{T_n} meßbar bzgl. $\mathcal{F}_{T_n}, L^1,$

- $E[X_{T_{n+1}} | \mathcal{F}_n] \leq X_{T_n} \quad .$

□

Bemerkung: Beim Optional Sampling ist entscheidend, daß die T_i alle durch eine konstante Zeit t_0 beschränkt sind!

Im Beispiel 2.15 sei $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\} \Rightarrow T < \infty$ fast sicher.

Aber (S_1, S_T) ist kein Martingal!

$$E(S_1) = 0, \quad E(S_T) = 1.$$

Betrachte Maximum

$$X_n^* : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad X_n^*(\omega) = \sup_{k \leq n} X_k(\omega).$$

Kapitel 4

Martingale-Ungleichungen

Satz 4.1 (Maximal-Ungleichungen). Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Submartingal, $X_k^* = \sup_{0 \leq n \leq k} X_n$.

Dann gilt

$$(i) \quad \forall c > 0 : \quad c \cdot P(X_k^* \geq c) \leq E(X_k \vee 0) \quad ,$$

$$(ii) \quad \forall p > 1 : \quad \|X_k^*\|_p \leq p' \cdot \|X_k\|_p,$$

mit $p' = \frac{p}{p-1}$, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, falls $X \geq 0$ oder X Martingal.

Wichtiger Spezialfall $p = 2$:

$$E \left(\sup_{n \leq k} X_n^2 \right) \leq 4 \cdot E(X_k^2).$$

Beweis: O.B.d.A. sei $X \geq 0$ ein Submartingal.

(Ansonsten Übergang von X zu $X \vee 0$ in (i) bzw. zu $|X|$ in (ii).)

(i) Sei $c > 0$ und

$$T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \geq c\} & , \text{ falls } X^*(\omega) \geq c \\ k & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow T$ ist Soppzeit (= Eintrittszeit in $[c, \infty[$).

Ferner gilt $\{X^* \geq c\} = \{X_T \geq c\} \in \mathcal{F}_T$ und mit Doobschen Lemma folgt:

$$c \cdot P(X^* \geq c) \leq \int_{\{X^* \geq c\}} X_T dP \leq \int_{\{X^* \geq c\}} X_k dP \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} E(X_n).$$

(ii) Nach bisherigem gilt:

$$c \cdot P(X^* \geq c) \leq \int_{\{X^* \geq c\}} X_k dP.$$

Wir zeigen:

Lemma 4.2. Für alle $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ZV gilt:

$$\begin{aligned} \forall c > 0 : \quad c \cdot P(f \geq c) &\leq \int_{\{f \geq c\}} g dP \\ &\Downarrow \\ \forall p > 1 : \quad \int f^p dP &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int g^p dP, \text{ da\ss\ } \text{heißt } \|f\|_p \leq p' \cdot \|g\|_p. \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int f^p dP &= \int \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t \leq f(\omega)\}} p \cdot t^{p-1} dt \\ &= \int_0^\infty p t^{p-1} \cdot P(t \leq f) dt \\ &\leq \int_0^\infty p t^{p-2} \cdot \int_{\{f \geq t\}} g dP dt \\ &= \int \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t \leq f(\omega)\}} g(\omega) \cdot p \cdot t^{p-2} dt P(d\omega) \\ &= \frac{p}{p-1} \int f(\omega)^{p-1} \cdot g(\omega) P(d\omega) \\ &\leq \frac{p}{p-1} \|g\|_p \cdot \|f^{p-1}\|_{p'} \quad \text{mit } p' = \frac{p}{p-1} \text{ Hölder-Ungleichung} \\ &= \frac{p}{p-1} \|g\|_p \cdot (\|f\|_p)^{p-1} \end{aligned}$$

□

Sei $I_0 \subset \mathbb{N}$, $f : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Definition 4.3. Die Anzahl der **absteigenden Überquerungen** von $[a, b]$ durch f ist definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_{a,b}(f) &:= \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists t_1 < t_2 < \dots < t_{2n} \text{ in } I_0 \text{ mit} \\ &\quad f(t_1) > b, f(t_2) < a, \dots, \\ &\quad f(t_{2n-1}) > b, f(t_{2n}) < a\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.4. Für $f : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $\gamma_{a,b}(f) < \infty$ ($\forall a < b$).
Dann existieren $\forall t_0 \in I_0$:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} f(t), \quad , \quad \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} f(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Beweis: für die Existenz von $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

Annahme: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert nicht.

$$\Rightarrow \quad \alpha := \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t) < \beta := \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$\forall \alpha < a < b < \beta : \quad \gamma_{a,b}(f) = \infty$$

(denn $f(t) < a$ immer wieder für $t \rightarrow \infty$ und ebenso $f(t) > b$ für $t \rightarrow \infty$). \square

Für einen stochastischen Prozeß $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei $L_{a,b} : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}_0$ definiert durch

$$L_{a,b}(\omega) = \gamma_{a,b}(X(\omega)).$$

$\forall a < b$: $L_{a,b}$ ist meßbar!

Lemma 4.5. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Submartingal. $\forall a < b$ gilt:

$$(b - a)E(L_{a,b}) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} E[(X_n - b)_+].$$

Bemerkung: Man sieht leicht:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} E[(X_n - b)_+] &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} E[(X_n)_+] + b_- \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_1 + b_-. \end{aligned}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen: $\forall J = \{t_1, \dots, t_k\} \subset I_0 \subset \mathbb{N}$ mit $t_1 < \dots < t_k$ gilt:

$$(b - a)E(\gamma_{a,b}(X(\cdot)|y)) \leq \sup_I E[(X_t - b)_+].$$

Wähle beliebiges $t_{k+1} \in I_0$ mit $t_{k+1} > t_k$ (rein technische Bedeutung) und definiere

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{t \in J : X_t > b\} \\ T_2 &= \inf\{t \in J : t > T_1, X_t < a\} \\ T_3 &= \inf\{t \in J : t > T_2, X_t > b\} \\ \dots &\quad \dots \end{aligned}$$

(jeweils mit $\inf \emptyset := t_{k+1}$)!

\Rightarrow Alle T_n sind Stoppzeiten (einfache Übung) mit

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_{k+1} = T_{k+2} = \dots = t_{k+1}.$$

D.h. für $\Omega_n := \{T_n < t_{k+1}\}$ gilt: $\Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_{k+1} = \emptyset$

und $X_{T_n} > b$ auf Ω_n , falls n ungerade

bzw. $X_{T_n} < a$ auf Ω_n , falls n gerade.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &\leq \int_{\Omega_{2l-1}} (X_{T_{2l-1}} - b) dP \leq \int_{\Omega_{2l-1}} (X_{T_{2l}} - b) dP \text{ wegen Doob-Lemma} \\ &= \int_{\Omega_{2l}} (X_{T_{2l}} - b) dP + \int_{\Omega_{2l-1} \setminus \Omega_{2l}} (X_{T_{2l}} - b) dP \\ &\leq (a - b) \cdot P(\Omega_{2l}) + \int_{\Omega_{2l-1} \setminus \Omega_{2l}} (X_{t_{k+1}} - b) dP, \end{aligned}$$

daß heißt

$$\begin{aligned} (b - a)P(\Omega_{2l}) &\leq \int_{\Omega_{2l-1} \setminus \Omega_{2l}} (X_{t_{k+1}} - b) dP \leq \int_{\Omega_{2l-1} \setminus \Omega_{2l}} (X_{t_{k+1}} - b)_+ dP \\ \Rightarrow \quad (b - a) \cdot E(\gamma_{a,b|J}) &= (b - a) \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}} P(\gamma_{a,b|J} \geq l) = (b - a) \cdot \sum_l P(\Omega_{2l}) \\ &\leq \int (X_{t_{k+1}} - b)_+ dP \end{aligned}$$

□

Kapitel 5

Martingale-Konvergenzsätze

Sei $I_0 \subset \mathbb{N}$, $f : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Lemma 5.1. Für jedes Submartingal $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt bei den folgenden Aussagen:
(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii):

- (i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} E(X_n^+) < \infty$,
- (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_1 < \infty$,
- (iii) $\exists \Omega_0 \in \mathcal{A}$ mit $P(\Omega_0) = 0 : \forall \omega \in \Omega \setminus \Omega_0, \forall a < b : \gamma_{a,b}(\omega) < \infty$.

Beweis: Offenbar (ii) \Rightarrow (i). Ferner

$$\|X_n\|_1 = E(|X_n|) = 2E(X_n^+) - E(X_n) \leq 2E(X_n^+) - E(X_0), \text{ wegen Submartingal.}$$

Also (i) \Rightarrow (ii).

- (i) $\Rightarrow E(\gamma_{a,b}) < \infty \quad \forall a < b$
 $\Rightarrow \forall a, b : \exists \Omega_{a,b} : P(\Omega_{a,b}) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega_{a,b} : \gamma_{a,b}(\omega) < \infty$.

Wegen $\gamma_{a,b} \leq \gamma_{a',b'}$, falls $a < a' < b' < b$ folgt:

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \Omega_0 : \forall a < b : \gamma_{a,b}(\omega) < \infty,$$

falls man wählt $\Omega_0 = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} \Omega_{a,b}$. □

Satz 5.2 (Doob'scher Satz). Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Submartingal mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} E(X_n^+) < \infty$ (d.h. L^1 -beschränkt).

Dann existiert

$$X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \quad P\text{-fast überall auf } \Omega$$

und definiert eine ZV $X_\infty \in L^1(P)$.

(Ω, \mathcal{F}, P) W-Raum mit Filtrierung $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge adaptierter integrierbarer ZV,
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Submartingal $\Leftrightarrow X_n \leq E^{\mathcal{F}_n} X_m \quad \forall n \leq m$

Lemma 5.3 (Doob's Downcrossing Lemma).

$$L_{a,b} := \sup\{k \in \mathbb{N}_0 : \exists l_1 < l_2 < \dots < l_{2k} \text{ mit} \\ X_{l_1} \geq b, X_{l_2} \leq a, \dots, X_{l_{2k-1}} \geq b, X_{l_{2k}} \leq a\}$$

$$\text{Dann} \quad EL_{a,b} \leq \sup_n \frac{E(X_n - b)^+}{b - a} \quad \forall a < b$$

Satz 5.4 (Doob'scher Konvergenzsatz).

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Submartingal mit $\sup_n EX_n^+ < \infty$ ($\Leftrightarrow \sup_n E|X_n| < \infty$ L^1 -Beschränktheit).

Dann $X_n \rightarrow X_\infty$ P -fast sicher mit X_∞ \mathcal{F}_∞ -meßbar und $X_\infty \in L^1$.

Korollar 5.5. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Supermartingal, $X_n \geq 0$ fast sicher.

Dann $X_n \rightarrow X_\infty$ fast sicher und $EX_\infty \leq EX_0$.

Denn: $(-X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Submartingal, $(-X_n)^+ = 0$ fast sicher

$$\text{Fatou: } EX_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{EX_n}_{\leq EX_0} \leq EX_0$$

Beispiel 5.6.

Sei $S_n = X_1 + \dots + X_n$ mit X_i unabhängig identisch verteilt, wobei $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ gilt. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_1, \dots, S_n\} = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. Dann ist (S_n, \mathcal{F}_n) ein Martingal.

Fixiere $k \in \mathbb{Z}$, dann folgt $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = k\}$, ($\Rightarrow T$ Stopzeit, d.h. $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \forall n$). $S_n^T = S_{n \wedge T} \Rightarrow (S_n^T)_{n \in \mathbb{N}}$ Martingal.

Konvergenzsatz: $S_n^T \rightarrow S_\infty^T$ fast sicher (offensichtlich $S_\infty^T = S_T \equiv k$, insbesondere $T < \infty$ fast sicher). Also $ES_n^T = ES_1^T = EX_1 = 0 \forall n$, aber $ES_\infty^T = k$. Insbesondere $S_n^T \not\rightarrow S_\infty^T$ in L^1 für $k \neq 0$ und $(S_n^T)_{n \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ kein Martingal für $k \neq 0$; auch kein Sub-[Super-]Martingal für $k \leq -1$ [$k \geq 1$].

Etwas $k \geq 1$, dann folgt $(k - S_n^T)_{n \in \mathbb{N}}$ Martingal, ≥ 0
 $0 = E(k - S_\infty^T) < E(k - S_n^T) = k$

Erinnerung $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von ZV.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar $\Leftrightarrow \sup_n E(|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n| > M\}}) \rightarrow 0$ für $M \rightarrow \infty$.

Beachte: $|X_n| \leq X \in \mathcal{L}^1$ (L^1 -Majoriertheit) $\Rightarrow (X_n)$ gleichgradig integrierbar.

$\sup_n E|X_n|^p < \infty$ für ein $p > 1$

(gleichmäßig L^p -beschränkt) $\Rightarrow (X_n)$ gleichgradig integrierbar.

Lemma 5.7. (X_n) Folge in \mathcal{L}^p ($1 \leq p < \infty$) und $X_n \rightarrow X$ P -stochastisch.

Dann sind äquivalent: i) $(|X_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar,
 ii) $X_n \rightarrow X$ in L^p ,
 iii) $E|X_n|^p \rightarrow E|X|^p < \infty$.

Beweis: letztes Semester.

Satz 5.8. Für ein Submartingal $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind äquivalent:

- i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar,
- ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in L^1 ,
- iii) $X_n \rightarrow X_\infty$ fast sicher mit X_∞ integrierbar und es gilt: $E|X_n| \rightarrow E|X_\infty|$.

Insbesondere ist dann auch $(X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ ein Submartingal ((X_n) "abschließbar bei ∞ ").

Beweis:

i) und ii) $\Rightarrow (X_n)$ L^1 -beschränkt $\Rightarrow X_n \rightarrow X_\infty$ fast sicher, wegen dem Konvergenzsatz von Doob. Lemma für $p = 1$: i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii).

Zusatz: $n < m$ und $A \in \mathcal{F}_n$: $\int_A X_n dP \leq \int_A X_m dP \rightarrow \int_A X_\infty dP$, wegen ii). □

Korollar 5.9. Für ein Martingal $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind äquivalent:

- i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar,
- ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^1 -konvergent,
- iii) $X_n = E^{\mathcal{F}_n}(X_\infty)$ für eine integrierbare ZV.

Denn nur zu zeigen iii) \Rightarrow i),

$|X_n| \leq E^{\mathcal{F}_n}|X_\infty|$ und $A = \{|X_n| > M \text{ und } |X_\infty| > M\} \cup \{|X_n| > M \text{ und } |X_\infty| \leq M\}$,

$A = \{|X_n| > M\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \int_A |X_n| dP \leq \int_A |X_\infty| dP$ □

Satz 5.10 (L^p -Konvergenzsatz).

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Martingal mit $\sup_n E|X_n|^p < \infty$ für ein $p > 1$.

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$
d.h. L^p beschränkt

Dann $X_n \rightarrow X_\infty$ fast sicher und in L^p .

Beweis: $X_n \rightarrow X_\infty$ fast sicher gemäß Konvergenzsatz.

L^p -Maximalungleichung:

$$E \left[\left(\sup_n |X_n| \right)^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_n E(|X_n|^p) < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n |X_n|^p \in L^1$$

$$\Rightarrow \text{(wegen der majorisierten Konvergenz)} E|X_n - X_\infty|^p \rightarrow 0 \quad \square$$

Bemerkung: falsch für $p = 1$.

Anwendung 5.11. Rückläufige Martingale

(engl. Backwards martingales)

Betrachte Submartingale der Form $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$,

d.h. $X_n \leq E^{\mathcal{F}_n}(X_m) \forall n \leq m; m, n \in -\mathbb{N}$ "absteigende/rückläufige" Submartingale.

Beachte: $\mathcal{F}_n \searrow \mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{n \in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Bemerkung: $n \in \mathbb{N}, a < b$,

$L_{a,b,n} :=$ Anzahl der absteigende Überquerungen von $[a, b]$ durch $(X_k)_{-n \leq k < 0}$,

$L_{a,b} := \sup L_{a,b,n}$.

Dann $E(L_{a,b}) = \sup_n \underbrace{E(L_{a,b,n})}_{\leq \frac{E(X_{-1}-b)^+}{b-a}} < \infty$, d.h. $L_{a,b} < \infty$ f.s. $\forall a < b$

$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow -\infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow -\infty} X_n =: X_{-\infty}$ fast sicher und $X_n \rightarrow X_{-\infty}$ fast sicher

$(X_n^+)_{n \in -\mathbb{N}}$ Submartingal: $E(X_{-\infty}^+) \leq \liminf_{n \rightarrow -\infty} E(X_n^+) \leq EX_{-1}^+ < \infty$.

↑
Fatou

Damit ist $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ ein Submartingal.

Dann $X_n \rightarrow X_{-\infty}$ fast sicher mit $-\infty \leq \underbrace{X_{-\infty}}_{\mathcal{F}_{-\infty}\text{-meßbar ZV}} < \infty$ fast sicher.

Satz 5.12. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ Martingal.

Dann existiert $X_{-\infty} := \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n$ fast sicher und in L^1 . Zudem ist auch $(X_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ ein Martingal.

Beweis: $X_n \rightarrow X_{-\infty}$ fast sicher, klar.

$X_n = E^{\mathcal{F}_n}(X_{-1}) \Rightarrow (X_n)$ gleichgradig integrierbar \Rightarrow (Lemma) $X_n \rightarrow X_{-\infty}$ in L^1 . \square

Bemerkung: $X_{-1} \in L^p \Rightarrow X_n \rightarrow X_{-\infty}$ in L^p .

Satz 5.13. Sei $X \in \mathcal{L}^1$; $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}_\infty := \sigma \left\{ \bigcup_n \mathcal{F}_n \right\}$.

Dann sind $X_n := E^{\mathcal{F}_n}(X)$ gleichgradig integrierbare Martingale und $X_n \rightarrow E^{\mathcal{F}_\infty}(X)$ fast sicher und L^1 .

Beweis: $X_n \rightarrow X_\infty$ fast sicher und L^1 , zu zeigen: $X_\infty = E^{\mathcal{F}_\infty}(X)$ fast sicher.

$$A \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \int_A X dP = \int_A X_n dP \rightarrow \int_A X_\infty dP, \text{ da } X_n \mathbf{1}_A \rightarrow X_\infty \mathbf{1}_A \text{ in } L^1.$$

Also $\int_A X dP = \int_A X_\infty dP \quad \forall A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n \quad (\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_\infty)$. □

Bemerkung: Analoges gilt im Fall: $\mathcal{F}_{-n} \searrow \mathcal{F}_{-\infty}$.

Beispiel 5.14 (Kolmogorov's 0/1-Gesetz).

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige Folge von ZV, dann folgt $\mathcal{F}_{\text{Term}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma\{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$.

Dann $P(A) \in \{0, 1\} \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\text{Term}}$.

Denn: $\mathcal{F}_n := \sigma\{X_1, \dots, X_n\}, A \in \mathcal{F}_{\text{Term}}$

$$X_n := \underbrace{E^{\mathcal{F}_n}(\mathbf{1}_A)}_{= P(A)} \rightarrow \underbrace{E^{\mathcal{F}_\infty}(\mathbf{1}_A)}_{= \mathbf{1}_A} \text{ f.s., da } A \text{ unabhängig von } \mathcal{F}_n. \quad \square$$

Anwendung 5.15. Starkes Gesetz der großen Zahlen

$S_n := X_1 + \dots + X_n$ mit (X_i) i.i.d., $E|X_1| < \infty$,

$Y_{-n} := \frac{S_n}{n}, \mathcal{F}_{-n} = \sigma\{S_n, S_{n+1}, \dots\} = \sigma\{S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$

Behauptung: $(Y_m, \mathcal{F}_m)_{m \in -\mathbb{N}}$ Martingal.

Denn: $E^{\mathcal{F}_{-n}} X_1 = E^{\mathcal{F}_{-n}} X_2 = \dots = E^{\mathcal{F}_{-n}} X_n$ fast sicher (aus Symmetriegründen).

Beachte $E^{\mathcal{F}_{-n}} X_i = E^{\sigma\{S_n\}} X_i, \quad i = 1, \dots, n$.

$$\text{Insbesondere } E^{\mathcal{F}_{-n}}(X_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E^{\mathcal{F}_{-n}}(X_i) = E^{\mathcal{F}_{-n}} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{S_n}{n} = Y_{-n}.$$

Konvergenzsatz (für Backwards-Martingale)

$$\frac{S_n}{n} = E^{\mathcal{F}_{-n}}(X_1) \rightarrow \underbrace{E^{\mathcal{F}_{-\infty}}(X_1)}_{= E(X_1)} \text{ fast sicher.}$$

Denn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ fast sicher konstant ($\mathcal{F}_{\text{Term}}$ -meßbar !). □

Anwendung 5.16. Produkt-Martingale

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige Folge von ZV, $X_n \geq 0$ fast sicher und $EX_n = 1$,

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}, \quad M_n = X_1 \cdot \dots \cdot X_n \geq 0.$$

$\Rightarrow (M_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Martingal (Übungsaufgabe) und $M_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ existiert fast sicher.

Behauptung: Entweder $E(M_\infty) = 1$ oder $M_\infty \equiv 0$ fast sicher, und zwar $E(M_\infty) = 1$ genau dann wenn

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n > 0 \text{ mit } 0 < a_n := E(X_n^{\frac{1}{2}}) \leq 1 \text{ (wegen Jensen).}$$

Beweis:

i) Es gelte $\prod_n a_n > 0$ ($\Leftrightarrow \sum_n (1 - a_n) < \infty$)

$$N_n := \frac{X_1^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot X_n^{\frac{1}{2}}}{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \Rightarrow (N_n)_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{L^2\text{-beschränkt}} \text{ Martingal}$$

$$EN_n^2 = \left(\frac{1}{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \right)^2 \leq \frac{1}{(\prod_k a_k)^2} < \infty$$

$$E(\sup_n M_n) \leq E(\sup_n N_n^2) \leq 4 \sup_n EN_n^2 < \infty$$

$M_n \leq N_n^2$ \uparrow L^2 - Maximalungleichung \uparrow
 $\Rightarrow (M_n)$ gleichgradig integrierbar (L^1 -majorisiert durch $\sup_n M_n \in L^1$),
 $\Rightarrow E(M_\infty) = E(M_1) = 1$.

ii) Es gelte $\prod_n a_n = 0$

$(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Martingal, $\geq 0 \Rightarrow N_n \rightarrow N_\infty$ fast sicher.

Aber $M_n^{\frac{1}{2}} = (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{N_n}_{\rightarrow N_\infty} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^n a_i}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$ fast sicher. □

Anwendung 5.17. auf simple random walks

$$S_n = X_1 + \dots + X_n; \quad (X_i) \text{ unabhängig identisch verteilt}$$

$$\underbrace{P(X_i = 1)}_{:= p} = 1 - \underbrace{P(X_i = -1)}_{:= q}$$

$$S_0 := 0$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$M_n := S_n - nE(X_1) \equiv \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)); n \geq 0 \text{ Martingal bzgl. } (\mathcal{F}_n).$$

- (1) $a, b \in \mathbb{N}$, dann folgt $T := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = a \text{ oder } S_n = -b\}$ Stopzeit
 $T < \infty$ fast sicher.
 (Denn: $(S_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränktes Sub- bzw. Supermartingal $\Rightarrow S_{n \wedge T}$ fast sicher
 Cauchy $\Rightarrow S_{n \wedge T}$ fast sicher schließlich konstant $\Rightarrow T < \infty$ fast sicher.)

Annahme: $0 < q < p$.

Behauptung: $\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \mathcal{F}_n\right)$ Martingal.

Beweis: $E^{\mathcal{F}_{n-1}} \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = E^{\mathcal{F}_{n-1}} \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \cdot \underbrace{E^{\mathcal{F}_{n-1}} \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}}_{= E \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}, \text{ da Unabh.}}$

Aber $E \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} = \frac{q}{p} \underbrace{P(X_n = 1)}_{= p} + \frac{p}{q} \underbrace{P(X_n = -1)}_{= q} = 1 \quad \square$

$\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n \wedge T}}\right)_{n \geq 0}$ ist ein beschränktes Martingal (insbesondere gleichgradig integrierbar).

$\Rightarrow 1 = E \left(\frac{q}{p}\right)^{S_0} = E \left(\frac{q}{p}\right)^{S_T} = \left(\frac{q}{p}\right)^a P(S_T = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^{-b} P(S_T = -b)$
 $\alpha \equiv \alpha(p; a, b) := P(S_T = a) = P\{\omega : \text{in } a \text{ als in } -b\}$.

Also $1 = \left(\frac{q}{p}\right)^a \alpha + \left(\frac{q}{p}\right)^{-b} (1 - \alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}$.

Insbesondere $\alpha(p; a, b) \xrightarrow{p \searrow \frac{1}{2}} \frac{b}{a+b}$.

(Denn: $x^n - 1 = (x - 1) \underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}_{\rightarrow n \text{ für } x \rightarrow 1}$ mit $x = \frac{q}{p}$.)

- (2) Sei $a \in \mathbb{N}$, dann folgt $T = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = a\}$.

Annahme: Ab jetzt $p = q = \frac{1}{2}$.

Es gilt $T < \infty$ fast sicher, aber $ET = \infty$.

(Denn: $S_{T \wedge n} \rightarrow S_T$ fast sicher,

$|S_{T \wedge n}| \leq \sum_{i=1}^{T \wedge n} |X_i| \leq T,$

Annahme $T \in L^1 \Rightarrow S_{T \wedge n} \rightarrow S_T$ in $L^1 \Rightarrow \underbrace{ES_T}_a = -ES_0 = 0$

Widerspruch)

(a) Sei $\theta \in \mathbb{R}$, dann folgt $Ee^{\theta X_n} = \frac{1}{2}(e^\theta + e^{-\theta}) = \cosh(\theta)$.

$$\Rightarrow E \left[\frac{e^{\theta X_n}}{\cosh(\theta)} \right] = 1 \quad \forall n,$$

$$\Rightarrow M_n^\theta := \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}, \quad n \geq 0 \text{ (Produkt-) Martingal.}$$

(b) Der Einfachheit halber $a = 1 : T = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = 1\}$.

Ab jetzt sei $\theta > 0$

$$e^{\theta S_{n \wedge T}} \leq e^\theta \Rightarrow M_{n \wedge T}^\theta \leq e^\theta \Rightarrow \underbrace{EM_0^\theta}_{=1} = EM_T^{-\theta} = E \frac{e^\theta}{(\cosh \theta)^T}.$$

Sei $\alpha = \frac{1}{\cosh(\theta)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{E(\alpha^T)}_{= \sum_n \alpha^n P\{T = n\}} &= e^{-\theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}, \\ &= \sum_n \alpha^n P\{T = n\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(T = 2m - 1) = (-1)^{m+1} \binom{\frac{1}{2}}{m}. \quad \square$$

Teil II

Allgemeine stochastische Prozesse

Kapitel 6

Stochastische Prozesse und kanonische Versionen

Einführung

Stochastische Prozesse sind mathematische Modelle zur Beschreibung zeitunabhängiger zufälliger Vorgänge.

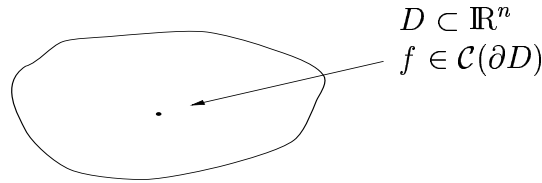
$$X : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

Für festes ω ist $t \mapsto X_t(\omega)$ ein möglicher Verlauf. Für festes t beschreibt die ZV $\omega \mapsto X_t(\omega)$ den Zustand zum Zeitpunkt t .

Typische Beispiele:

- Ort eines diffundierenden Moleküls “Brownsche Molekularbewegung“
1828 R. Brown (Botaniker)
1905 A. Einstein
1906 M. von Smoluchowski
- Wechselkurse an der Börse
1900 L. Bachelier
führt zur Brownschen Bewegung,
erstes mathematisches Modell dazu entstand

Gegeben:



Gesucht: $u \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}(\bar{D})$ mit
 $\Delta u = 0$ in D
 $u = f$ auf ∂D

Lösung: $u(x) = E_x[f(X_{\tau_{\partial D}})]$

Gegeben sei ein Maßraum (E, \mathcal{B}) und eine Menge I . (Ω, \mathcal{A}, P) sei ein W-Raum.

Definition 6.1. X und \tilde{X} seien stochastische Prozesse, definiert auf W-Räumen (Ω, \mathcal{A}, P) bzw. $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ mit demselben Zustandsraum (E, \mathcal{B}) und derselben Parametermenge I .

a) X und \tilde{X} heißen **äquivalent** oder **Versionen voneinander**, falls sie dieselben endlichdimensionalen Verteilungen besitzen, d.h. falls für alle endlichen $J \subset I$ gilt:

$$P_J = \tilde{P}_J.$$

Wiederholung: Für $t \in I$ erhält man die Verteilung P_t von X_t als W-Maß auf (E, \mathcal{B}) durch

$$\begin{aligned} P_t(B) &= P(X_t \in B) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B\}). \end{aligned}$$

Für endliches $J \subset I$ erhält man die gemeinsame Verteilung P_J von $(X_t)_{t \in J}$ bzw. die Verteilung $X_J = \bigotimes_{t \in J} X_t$ als W-Maß auf (E^J, \mathcal{B}^J) durch

$$P_J(B) = P(X_J \in B) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}^J.$$

Konkret: Für $J = \{t_1, \dots, t_n\}$ und $B = B_1 \times \dots \times B_n$ ist
 $P_J(B) = P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n)$

b) X und \tilde{X} heißen **Modifikationen voneinander**, falls $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ und $P(X_t = \tilde{X}_t) = 1$ für alle $t \in I$.

c) X und \tilde{X} heißen **ununterscheidbar** (indistinguishable), falls $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ und $P(X_t = \tilde{X}_t \text{ für alle } t \in I) = 1$.

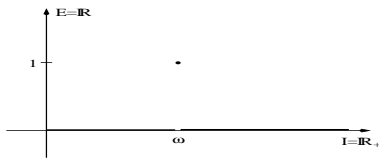
Bemerkungen:

- (i) Offenbar gilt $c \Rightarrow b \Rightarrow a$, aber die Umkehrung gilt i.a. nicht.
- (ii) Bei der Modellierung realer Vorgänge (aus Physik, Ökonomie, ...) kennt man i.a. nur die endlich-dimensionalen Verteilungen. D.h. der zugrundeliegende W-Raum ist beliebig, und der stochastische Prozeß ist nur bis auf Äquivalenz (im Sinne von a)) eindeutig bestimmt.
- (iii) Verschiedene Modifikationen (insbesondere verschiedene Versionen) \tilde{X} eines gegebenen Prozesses X können jedoch völlig verschiedene Pfadverhalten aufweisen, etwa
- Stetigkeit, Differenzierbarkeit der Trajektorien $t \mapsto X_t(\omega)$ (für P -fast alle $\omega \in \Omega$),
 - oder die Wahrscheinlichkeit, eine Menge $B \subset E$ jemals zu treffen, $P(X_t \in B \text{ für mindestens ein } t \in I)$.

Beispiel 6.2. (Zeigt $b \not\Rightarrow c$):)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = \nu_{0,1}$, $I = \mathbb{R}_+$ und $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 & t \neq |\omega| \\ 1 & t = |\omega| \end{cases} \quad \tilde{X}_t(\omega) = 0$$



Dann gilt:

Für alle $t \in \mathbb{R}_+$: $P(X_t = \tilde{X}_t) = 1$.

Aber: $P(X_t = \tilde{X}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+) = 0$.

Denn: $\{\omega : X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega) \text{ f.a. } t \in \mathbb{R}_+\} = \emptyset$.

Bemerkungen:

a) Seien X und \tilde{X} stochastische Prozesse auf gemeinsamem W-Raum (Ω, \mathcal{A}, P) mit gemeinsamer Indexmenge I .

Für $J \subset I$ sei

$$\begin{aligned} \Omega_J &= \{\omega \in \Omega : \text{es ex. } t \in J : X_t(\omega) \neq \tilde{X}_t(\omega)\} \\ &= \bigcup_{t \in J} \Omega_{\{t\}}. \end{aligned}$$

b) X und \tilde{X} sind Modifikationen genau dann, wenn $P(\Omega_{\{t\}}) = 0$ für alle $t \in I$, also wenn $P(\Omega_J) = 0$ für alle abzählbaren Teilmengen $J \subset I$.

- c) X und \tilde{X} sind ununterscheidbar $\Leftrightarrow P(\Omega_I) = 0 \Leftrightarrow P(\Omega_J) = 0$ für alle $J \subset I$.
- d) Falls X und \tilde{X} rechtsseitig stetig oder linksseitig stetig mit $I = \mathbb{R}$, dann ist $\Omega_I = \Omega_{I \cap \mathbb{Q}}$.
Falls X und \tilde{X} P -fast sicher rechtsseitig stetig, dann ist $P(\Omega_I \setminus \Omega_{I \cap \mathbb{Q}}) = 0$.

Lemma 6.3. Sei E topologischer Raum, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und seien X, \tilde{X} stochastische Prozesse mit P -fast sicher rechtsseitig stetigen Pfaden (d.h. für P -fast alle $\omega \in \Omega$ ist $t \mapsto X_t(\omega)$ rechtsseitig stetig).

Dann gilt: X und \tilde{X} sind ununterscheidbar

$\Leftrightarrow X$ und \tilde{X} sind Modifikationen voneinander.

Beweis: Mit Bemerkung, Teil d).

Lemma 6.4. Sei $(X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozeß auf (E, \mathcal{B}) mit W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P) . Dann definieren die Koordinaten-Abbildungen $\Pi_t : \omega \mapsto \omega(t)$ einen äquivalenten Prozeß auf (E, \mathcal{B}) mit W -Raum $(E^I, \mathcal{B}^I, P_X)$, genannt **kanonische Version**.

Hierbei ist

$$E^I = \prod_{t \in I} E = \{ \omega : I \rightarrow E \text{ Abb. } \},$$

$$\mathcal{B}^I = \bigotimes_{t \in I} \mathcal{B} = \text{kleinste } \sigma\text{-Algebra auf } E^I, \text{ bzgl. der}$$

alle Koordinatenabbildungen Π_t $\mathcal{B}^I/\mathcal{B}$ -meßbar sind.

$$= \text{kleinste } \sigma\text{-Algebra auf } E^I, \text{ in der alle Zylindermengen enthalten sind:}$$

$$A = \prod_{t \in I} A_t \text{ mit } A_t = E \text{ für alle bis auf endlich viele } t \in I,$$

$$P_X = \text{Bildmaß von } P \text{ unter } X : \Omega \rightarrow E^I.$$

Hinweis: $X : I \times \Omega \rightarrow E$, d.h. $X \in E^{I \times \Omega}$.

$X : \Omega \rightarrow E^I$, d.h. $X \in (E^I)^\Omega$.

Beweis: Für alle $t_1, \dots, t_n \in I$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} P_X(v \in E^I : \Pi_{t_1}(v) \in B_1, \dots, \Pi_{t_n}(v) \in B_n) \\ &= P(\omega \in \Omega : \Pi_{t_1}(X)(\omega) \in B_1, \dots, \Pi_{t_n}(X)(\omega) \in B_n) \\ &= P(\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \in B_n) \end{aligned}$$

□

Kapitel 7

Projektive Limiten und der Konsistenzsatz von Kolmogorov

Gegeben $I, (E, \mathcal{B}), (\Omega, \mathcal{A}, P), X$.
Für $J \subset I, J \neq \emptyset$ sei

$$E^J = \prod_{t \in J} E, \quad \mathcal{B}^J = \bigotimes_{t \in J} \mathcal{B}, \quad X_J = \bigotimes_{t \in J} X_t,$$
$$P_J = X_J(P) = P_{X_J},$$
$$X_J : \Omega \rightarrow E^J, \quad X_I : \Omega \rightarrow E^I.$$

Für $J \subset H \subset I, J \neq \emptyset$ sei

$$\Pi_J^H : E^H \rightarrow E^J \quad \text{Projektionsabbildung}$$

(Restriktion von $v : H \rightarrow E$ zu $\tilde{v} : J \rightarrow E$).

Dann gilt $X_J = \Pi_J^H \circ \Pi_H^I \circ X = \Pi_J^H \circ X_H$ und daher

$$P_J = \Pi_J^H(P_H). \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Denn: } P_J(A) &= P(X_J^{-1}(A)) \\ &= P(X_H^{-1} \circ (\Pi_J^H)^{-1}(A)) = P_H((\Pi_J^H)^{-1}(A)) \\ &= (\Pi_J^H(P_H))(A). \end{aligned}$$

Die Menge $(P_J)_{\emptyset \neq J \text{ endlich} \subset I}$ definiert durch $P_J = X_J(P)$ heißt **Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen** des Prozesses X .

Bemerkung:

Kennt man die Verteilung $P_I = P_X$ von X , so erhält man daraus die endlich-dimensionalen Verteilungen einfach durch Projektion $P_J = \Pi_J^I(P_I)$. Das Problem ist die Umkehrung!

Definition 7.1. Eine Familie $(P_J)_{J \text{ endlich } \subset I, J \neq \emptyset}$ von W -Maßen auf (E^J, \mathcal{B}^J) heißt **projektive Familie**, falls sie der Bedingung (*) genügt.

Beispiele 7.2.

1. Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen $(X_J(P))_{J \subset I, J \neq \emptyset \text{ endlich}}$ eines stochastischen Prozesses X auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten im (E, \mathcal{B}) .
2. $(P_t)_{t \in I}$ beliebige Familie von W -Maßen auf (E, \mathcal{B}) , $P_J = \bigotimes_{t \in J} P_t$
 \rightarrow entspricht Prozeß X mit unabhängigen $X_t, t \in I$.

Satz 7.3 (Kolmogorov). Sei E polnischer Raum, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ und I beliebig. Zu jeder projektiven Familie $(P_J)_{J \text{ endlich } \subset I}$ von W -Maßen auf (E^J, \mathcal{B}^J) existiert genau ein W -Maß P_I auf (E^I, \mathcal{B}^I) mit

$$(**) \quad P_J = \Pi_J^I(P_I) \quad \text{für alle endlichen Teilmengen } J \text{ von } I.$$

P_I heißt **projektiver Limes** der Familie $(P_J)_{J \text{ endlich } \subset I}$

$$P_I := \lim_{\leftarrow J \text{ endl. } \subset I} P_J.$$

Bemerkungen:

1. E polnisch: $\Leftrightarrow E$ vollständig metrisierbar und separabel.
2. Ist E polnisch, so auch E^J für jedes abzählbare J und $\mathcal{B}(E)^J = \mathcal{B}(E^J)$.
3. Ist E polnisch, so ist jedes endliche Maß μ auf $(E, \mathcal{B}(E))$ regulär:

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt } \subset B\} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}(E).$$

4. Obige Bemerkung 3 und damit auch Satz 7.3 gelten allgemeiner für topologische Lusin-Räume E , vgl. Kapitel 16. Ersetzt man $\mathcal{B}(E)$ durch $\mathcal{B}^u(E)$, so gilt der obige Satz sogar für alle topologische Radon-Räume E .

Beispiel 7.2.2 von eben

Projektiver Limes existiert stets (ohne Bedingung an E), nämlich $P_I = \bigotimes_{t \in I} P_t$.

Beweis des Satzes 7.3 von Kolmogorov:

a) Für J endlich $\subset I$ sei

$$\mathcal{B}^J = \mathcal{B}(E)^J = \mathcal{B}(E^J) \text{ } \sigma\text{-Algebra in } E^J$$

und

$$\tilde{\mathcal{B}}^J = (\Pi_J^I)^{-1}(\mathcal{B}^J) \text{ } \sigma\text{-Algebra in } E^I.$$

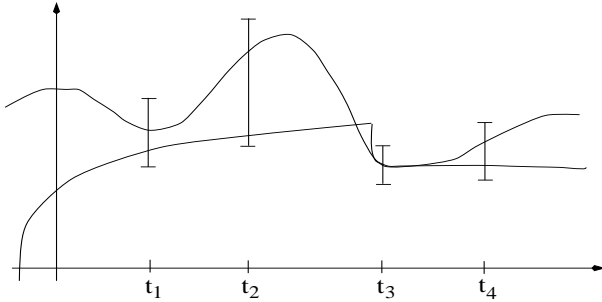
Aus $J \subset H$ folgt $\tilde{\mathcal{B}}^J \subset \tilde{\mathcal{B}}^H$.

Also ist $\bigcup_{J \text{ endlich } \subset I} \tilde{\mathcal{B}}^J$ eine Algebra in E^I ("Algebra der Zylindermengen").

Etwas anschaulicher:

$$\begin{aligned} \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}} &\Leftrightarrow \text{es existiert } n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in I, \\ B \in E^n, \tilde{B} &= \{v \in E^I : v(t_1), \dots, v(t_n) \in B\}. \end{aligned}$$

Für $B = B_1 \times \dots \times B_n$



b) Eindeutigkeit von P_I :

Angenommen es existiert ein P_I auf $(E^I, \tilde{\mathcal{B}}^I)$ mit (**). Dann gilt für alle $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$:

$$\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^J \text{ für ein endliches } J \subset I.$$

D.h. $\tilde{B} = (\Pi_J^I)^{-1}(B)$ mit $B \in \mathcal{B}^J$.

$$\text{Also } P_I(\tilde{B}) = P_I((\Pi_J^I)^{-1}(B)) = P_J(B).$$

Daher ist P_I auf $(E^I, \tilde{\mathcal{B}})$ eindeutig festgelegt durch die Familie $(P_J)_{J \text{ endlich } \subset I}$.
Nun ist $\mathcal{B}^I = \sigma(\tilde{\mathcal{B}})$ (per Definition). Also ist P_I auf (E^I, \mathcal{B}^I) eindeutig.

c) Existenz von P_I

Definiere P_I zunächst auf $(E^I, \tilde{\mathcal{B}})$ wie eben (möglich wegen (*)). Dann ist P_I ein Inhalt, d.h. additiv statt σ -additiv, mit $P_I(E^I) = 1$.

Es bleibt zu zeigen: P_I ist \emptyset -stetig, d.h. für alle $(\tilde{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \tilde{B}_n \in \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{B}_n \searrow \emptyset$
 $\Rightarrow P_I(\tilde{B}_n) \rightarrow 0$.

Annahme $P_I(\tilde{B}_n) \geq \epsilon > 0$ für alle $n, \tilde{B}_n \searrow \emptyset$.

Jedes $\tilde{B}_n \in \tilde{\mathcal{B}}$ ist ein $(\Pi_{J_n}^I)^{-1}(B_n)$ mit geeignetem J_n endlich $\subset I$
und $B_n \in \mathcal{B}^{J_n}$.

o.B.d.A. $J_n \subset J_{n+1}$, sogar $J_n = \{t_1, \dots, t_n\}$
 \Rightarrow (da E polnisch) es existiert K_n kompakt $\subset B_n$:

$$P_{J_n}(B_n \setminus K_n) \leq \epsilon \cdot 2^{-n}.$$

Sei $\tilde{K}_n = (\Pi_{J_n}^I)^{-1}(K_n)$ und $\tilde{L}_n \cap \bigcap_{m \leq n} \tilde{K}_m$, also $\tilde{L}_n \subset \tilde{K}_n \subset \tilde{B}_n \subset E^I$ und es gilt

$$\tilde{L}_n \searrow \emptyset$$

$$\Rightarrow P_I(\tilde{B}_n \setminus \tilde{K}_n) = P_{J_n}(B_n \setminus K_n) \leq \epsilon \cdot 2^{-n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_I(\tilde{B}_n \setminus \tilde{L}_n) &= P_I\left(\bigcup_{m \leq n} \tilde{B}_m \setminus \tilde{K}_m\right) \leq P_I\left(\bigcup_{m \leq n} \tilde{B}_m \setminus \tilde{K}_m\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^n P_I(\tilde{B}_m \setminus \tilde{K}_m) \leq \epsilon \cdot \sum_{m=1}^n 2^{-m} < \epsilon. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_I(\tilde{L}_n) > 0 \Rightarrow \text{es existiert } w_n \in \tilde{L}_n.$$

Für alle $m \geq n$: $w_m \in \tilde{L}_m \subset \tilde{L}_n \subset \tilde{K}_n$.

Für alle $l \leq n$:

$$w_m(t_l) = \Pi_{t_l}^I(w_m) \in \Pi_{t_l}^I \tilde{K}_n = \Pi_{t_l}^{J_n} K_n \text{ kompakt } \subset E$$

\Rightarrow es existiert eine Teilfolge $(w'_m)_m$ von $(w_m)_m$, so daß $(w'_m(t_1))_m$ in E konvergiert

\Rightarrow es existiert eine Teilfolge $(w''_m)_m$ von $(w'_m)_m$, so daß $(w''_m(t_2))_m$ in E konvergiert

$\Rightarrow \dots$

\Rightarrow es existiert eine Teilfolge ("Diagonalfolge") $(\bar{w}_m)_m$ von $(w_m)_m$, so daß $(\bar{w}_m(t_l))_m$ in E konvergiert für alle l .

Sei $w(t_l) = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{w}_m(t_l)$ für $l \in \mathbb{N}$

und $w(t) = w_0$ (beliebig $\in E$) für $t \notin \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \{t_l\}$.

Dann ist $w \in E^I$ und $w(t_l) \in \Pi_{t_l}^{J_n} K_n$ für alle $l \Rightarrow w \in \tilde{K}_n$.

Das gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$w \in \bigcap \tilde{K}_n \subset \tilde{B}_n = \emptyset.$$

□

Korollar 7.4. E polnisch, I beliebig, $(P_J)_{J \text{ endlich } \subset I}$ projektiv. Dann existiert ein stochastischer Prozeß mit (P_J) als endlich-dimensionale Verteilungen.

Nämlich: $(\Pi_t)_{t \in I}$ auf $(E^I, \mathcal{B}(E)^I)$, $\lim_{\substack{\leftarrow \\ J \text{ endl. } \subset I}} P_J$

Kapitel 8

Stetige Versionen

Satz 8.1 (Kolmogorov-Chentsov). Sei I abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} , $(X_t)_{t \in I}$ stochastischer Prozeß auf W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in \mathbb{R}^d mit

$$(*) \quad E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq C|t - s|^{\beta+1}$$

für alle $s, t \in I$ und geeignete Konstanten $C, \alpha, \beta > 0$.

Dann existiert eine stetige Modifikation $(Y_t)_{t \geq 0}$ von $(X_t)_{t \geq 0}$, d.h.

- $t \mapsto Y_t(\omega)$ stetig auf I für alle $\omega \in \Omega$
- $P(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in I$.

Diese stetige Modifikation ist sogar Hölder-stetig für jedes $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[$ im folgendem Sinne:

Es existiert $\delta > 0$ und eine ZV $h : \Omega \rightarrow]0, \infty[$, so daß für $\omega \in \Omega$ und $s, t \in I$ mit $|t - s| < h(\omega)$

$$(**) \quad |Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leq \delta|t - s|^\gamma.$$

Beweis: Zunächst $I = [0, 1]$.

a)• Aus Chebyshev-Ungleichung folgt für alle $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P(|X_t - X_s| \geq \epsilon) &\leq \epsilon^{-\alpha} E(|X_t - X_s|^\alpha) \\ &\leq C \cdot \epsilon^{-\alpha} |t - s|^{1+\beta} \end{aligned}$$

Also $X_s \rightarrow X_t$ in Wahrscheinlichkeit (stochastische Konvergenz) für $s \rightarrow t$

- Ferner: für $t = k \cdot 2^{-n}$, $s = (k-1)2^{-n}$ und $\epsilon = 2^{-\gamma n}$ (mit $0 < \gamma < \frac{\beta}{\alpha}$):

$$P(|X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}| \geq 2^{-\gamma n}) \leq C \cdot 2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P\left(\sup_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}| \geq 2^{-\gamma n}\right)}_{A_n} \leq \sum_{1 \leq k \leq 2^n} P(|X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}| \geq 2^{-\gamma n})$$

$$\leq C \cdot 2^{-n(\beta - \alpha\gamma)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$$

$$\Rightarrow P(A_n \text{ f\u00fcr unendlich viele } n) = 0 \text{ (nach Borel-Cantelli).}$$

M.a.W.: es existiert $\Omega^* \in \mathcal{A}$ mit $P(\Omega^*) = 1$ und f\u00fcr alle $\omega \in \Omega^*$ existiert ein $n^*(\omega) \in \mathbb{N}$, so da\u00df f\u00fcr alle $n \geq n^*(\omega)$

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{k2^{-n}}(\omega) - X_{(k-1)2^{-n}}(\omega)| < 2^{-\gamma n}. \quad (8.1)$$

b) F\u00fcr $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n = \{k \cdot 2^{-n} | k = 0, 1, \dots, 2^n\}$

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{\text{dyadische Zahlen in } [0, 1]\}.$$

Sei $\omega \in \Omega^*$ und $n \geq n^*(\omega)$.

Behauptung: F\u00fcr alle $m > n$, alle $t, s \in D_m$ mit $0 < t - s < 2^{-n}$ gilt

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^m 2^{-\gamma j}. \quad (8.2)$$

Beweis durch Induktion nach m :

- $m = n + 1$: $t = k \cdot 2^{-m}$, $s = (k-1)2^{-m}$ und damit (8.1) \Rightarrow (8.2)

- angenommen, (8.2) gilt f\u00fcr $m = n + 1, \dots, M - 1$:

F\u00fcr $s, t \in D_M$, $s < t$, w\u00e4hle

$$\begin{aligned} t_1 &= \max\{r \in D_{M-1} : r \leq t\} \\ s_1 &= \min\{r \in D_{M-1} : r \geq s\} \\ \Rightarrow \quad s &\leq s_1 \leq t_1 \leq t \\ s_1 - s &\leq 2^{-M}, \quad t - t_1 \leq 2^{-M}. \end{aligned}$$

Aus (8.1) folgt:

$$\begin{aligned} |X_{s_1}(\omega) - X_s(\omega)| &\leq 2^{-\gamma M} \\ |X_t(\omega) - X_{t_1}(\omega)| &\leq 2^{-\gamma M}, \end{aligned}$$

und aus (8.2) mit $m = M - 1$ folgt:

$$|X_{t_1}(\omega) - X_{s_1}(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{M-1} 2^{-\gamma j}.$$

Das zusammen ergibt (8.2) f\u00fcr $m = M$.

- c) Sei $h(\omega) = 2^{-n^*(\omega)}$ und $\delta = \frac{2}{1-2^{-\gamma}}$. Für beliebige $s, t \in D$ mit $0 < t - s < h(\omega)$ wähle $n \geq n^*(\omega)$ mit $2^{-(n+1)} \leq t - s \leq 2^{-n}$.
Aus (8.2) folgt

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \sum_{j \geq n+1} 2^{-\gamma j} \leq \delta |t - s|^\gamma \quad (8.3)$$

und damit die gleichmäßige Stetigkeit und die lokale Hölder-Stetigkeit von $(X_t)_{t \in D}$ (für $\omega \in \Omega^*$).

- d) $Y = (Y_t)_{t \in [0,1]}$ wird wie folgt definiert:
Für $\omega \in \Omega \setminus \Omega^* : Y_t(\omega) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$,
für $\omega \in \Omega^* : Y_t(\omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega)$ für alle $t \in [0, 1]$.
- Wegen (15.11) ist $t \mapsto Y_t(\omega)$ stetig für jedes $\omega \in \Omega$. Genauer: Y erfüllt auch (15.11), und zwar für alle $s, t \in [0, 1]$ mit $0 < t - s < h(\omega)$.
 - Ferner ist $\omega \mapsto Y_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_n}(\omega)$ meßbar als Limes einer Folge von meßbaren Abbildungen mit $s_n \in D, s_n \rightarrow t$.
 - Schließlich ist $Y_t = X_t$ P -fast sicher für jedes $t \in [0, 1]$; denn für $t \in D$ ist es per Definition gleich, für $t \in [0, 1] \setminus D$ sei $s_n \in D, s_n \rightarrow t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} X_{s_n} \rightarrow X_t & P\text{-stochastisch} \\ X_{s_n} \rightarrow Y_t & P\text{-fast sicher} \end{cases} \\ \Rightarrow & X_t = Y_t \text{ } P\text{-fast sicher.} \end{aligned}$$

- e) Sei nun I ein abgeschlossenes Intervall $\subset \mathbb{R} \Rightarrow I = \bigcup I_n, I_n = I \cap [-n, n]$.
Also gegeben: $X_t : \Omega \rightarrow E$ \mathcal{A}/\mathcal{B} -meßbar, $t \in I$.
Konstruiere $X_t : \Omega \rightarrow E$ \mathcal{A}/\mathcal{B} -meßbar, $t \in I$.

Betrachte kanonische Versionen

$$X = X_I : \Omega \rightarrow E^I \quad \mathcal{A}/\mathcal{B}^I\text{-meßbar}$$

\rightarrow Bildmaß P_X auf (E^I, \mathcal{B}^I) .

Ebenso:

$$Y = Y_I : \Omega \rightarrow E^I \quad \mathcal{A}/\mathcal{B}^I\text{-meßbar}$$

\rightarrow Bildmaß P_Y auf (E^I, \mathcal{B}^I) . □

Bemerkungen:

1. $P_X = P_Y$, denn für $\emptyset \neq J \subset I$, J endlich:

$$\Pi_J^I(P_X) = P_{X_J} = P_{Y_J} = \Pi_J^I(P_Y).$$

2. Es gilt sogar: $Y : \Omega \rightarrow \mathcal{C}(I, E) =: \mathcal{C}$

Ziel: Betrachte P_Y nicht auf E^I , sondern nur auf \mathcal{C} .

Naheliegende Behauptung: $P_Y(E^I \setminus \mathcal{C}) = 0$.

Problem: \mathcal{C} ist nicht meßbar i.a.!

Bemerkungen zu \mathcal{B}^I für $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ mit E polnisch, $\#(E) \geq 2$.

1. Wiederholung: $\mathcal{B}^I = \sigma(\{\Pi_{\{t\}}^I : t \in I\})$

- 2.

Lemma 8.2. *Jede Menge $A \in \mathcal{B}^I$ ist abzählbar determiniert im folgenden Sinne: zu A existieren eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$ und $B \in \mathcal{B}^J$, so daß*

$$A = (\Pi_J^I)^{-1}(B) = \{v \in E^I : (v(t))_{t \in J} \in B\}.$$

Beweis: in den Übungen.

3. Für alle abzählbaren I ist E^I polnisch und $\mathcal{B}(E^I) = \mathcal{B}(E)^I$.

4. $\mathcal{C} \notin \mathcal{B}^{\mathbb{R}_+}$,
sogar: $\mathcal{C} \notin \mathcal{B}^I$ für alle überabzählbaren I .

5. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ ist polnisch und

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{C}) &= \underbrace{\mathcal{C} \cap \mathcal{B}(E)^{\mathbb{R}_+}}_{\text{Spur-}\sigma\text{-Algebra}} \\ &= \{\mathcal{C} \cap A : A \in \mathcal{B}(E)^{\mathbb{R}_+}\}. \end{aligned}$$

6. Ist (S, \mathcal{Y}, μ) ein W-Raum, so ist das äußere Maß μ^* auf $(S, \mathcal{P}(S))$ definiert durch

$$\mu^*(R) = \inf\{\mu(Q) : Q \supset R, Q \in \mathcal{Y}\}.$$

μ^* ist σ -subadditiv auf $\mathcal{P}(S)$, i.a. aber kein Maß.

7. Ist $\mu^*(R) = 1$, so ist μ^* eingeschränkt auf $(R, R \cap \mathcal{Y})$ ein W-Maß. Hierbei ist $R \cap \mathcal{Y} = \{R \cap Q : Q \in \mathcal{Y}\}$ "Spur- σ -Algebra" und $\mu^*(R \cap Q) = \mu(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{Y}$.

Satz 8.3 (Doob). Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ stochastischer Prozeß auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten im polnischen Raum $(E, \mathcal{B}(E))$.

Dann sind für eine Menge $\tilde{\Omega} \subset E^I$ äquivalent:

(i) Es existiert ein zu $(X_t)_t$ äquivalenter Prozeß, dessen Pfadabbildungen sämtlich in $\tilde{\Omega}$ liegen.

(ii) Der "kanonische Prozeß mit Pfaden in $\tilde{\Omega}$ " $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega} \cap \mathcal{B}^I, P_X^*)$ ist zu X_t äquivalent.

(iii) Die Menge $\tilde{\Omega}$ hat ein äußeres Maß $P_X^*(\tilde{\Omega}) = 1$.

Beweis: (i) \Rightarrow (iii):

o.B.d.A. $(X_t)_t$ selbst hat in $\tilde{\Omega}$ liegende Pfadabbildungen.

Es gilt:

$\tilde{\Omega} \supset X_I(\Omega)$ mit $X_I: \Omega \rightarrow E^I$ und $P_I = X_I(P)$.

Behauptung: $P_I^*(\tilde{\Omega}) = 1$,

m.a.W.: $P_I^*(\Omega^*) = 1$ für alle $\Omega^* \in \mathcal{B}^I$ mit $\Omega^* \supset \Omega$. Nun gilt: $\Omega = X_I^{-1}(\tilde{\Omega}) \subset X_I^{-1}(\Omega^*) \subset \Omega$, also $X_I^{-1}(\Omega^*) = \Omega$ und damit

$$P_I(\Omega^*) = P(X_I^{-1}(\Omega^*)) = P(\Omega) = 1$$

für alle solchen Ω^* .

(iii) \Rightarrow (ii): ähnlich.

(ii) \Rightarrow (i): trivial.

Korollar 8.4. Sei $(X_t)_t$ ein stochastischer Prozeß, der der Bedingung (*) aus dem Satz von Kolmogorov-Chentsov genügt. Dann existiert ein W -Maß P_0 auf $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$, so daß der kanonische Prozeß $(\Pi_t)_t$ auf $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), P_0)$ zu $(X_t)_t$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) äquivalent ist.

Kapitel 9

Gauß-Prozesse

Definition 9.1.

1. Ein W -Maß μ auf \mathbb{R}^1 heißt **Gauß-Maß**, falls es $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ gibt mit:

$$\mu(dx) = \nu_{\sigma^2}(dx - \alpha) = N(\sigma^2, \alpha)(dx),$$

(d.h. Normalverteilung mit Erwartungswert α , Varianz $\sigma^2 > 0$ bzw. Punktmasse in α , falls $\sigma^2 = 0$).

2. Ein W -Maß μ auf \mathbb{R}^d heißt **Gauß-Maß**, falls für jede lineare Abbildung $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $h(\mu)$ ist Gauß-Maß.
3. Ein \mathbb{R}^d -wertiger Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ heißt **Gauß-Prozeß**, falls jede seiner endlich-dimensionalen Verteilungen $P_{X_{t_1}, \dots, X_{t_k}}$ ein Gauß-Maß ist auf $\mathbb{R}^{d \cdot k}$ für alle k und t_j . I beliebig!
Ein Gauß-Prozeß heißt **zentriert**, falls $E(X_t) = 0$ für alle $t \in I$.

Satz 9.2.

- a) Äquivalent sind die folgenden Aussagen:

(i) μ ist d -dimensionales Gauß-Maß.

(ii)
$$\hat{\mu}(\xi) = \exp(i \langle \xi, m \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, C\xi \rangle)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$, mit $m \in \mathbb{R}^d$ („Erwartungsvektor“) und $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ („Kovarianzmatrix“).

C ist symmetrisch und positiv semidefinit.

- b) μ ist durch C und m eindeutig festgelegt, und umgekehrt existiert zu jedem solchem C und m ein entsprechendes μ .

Ist μ die Verteilung einer \mathbb{R}^d -wertigen ZV $X = (X^1, \dots, X^d)$, so ist $m = E(X)$, genauer $m = (m_1, \dots, m_d)$ mit $m_i = E(X^i)$, und $C = (C_{ij})_{i,j}$ mit $C_{ij} = \text{cov}(X^i, X^j) = E((X^i - m_i) \cdot (X^j - m_j))$.

$\mu = N(m, C)$ heißt auch **multivariate Normalverteilung** mit Erwartungswert m und Kovarianz C .

c) Ist C sogar positiv definit, so ist $\mu = \rho \lambda^d$ mit

$$\rho(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det C)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x - m, C^{-1}(x - m) \rangle\right).$$

Hinweis: C positiv semidefinit: $\langle x, Cx \rangle \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$,
 C positiv definit: $\langle x, Cx \rangle > 0$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus 0$.

Beweis:

a) (i) \Rightarrow (ii): Für alle $y \in \mathbb{R}^d$ ist $\langle y, \cdot \rangle: x \mapsto \langle y, x \rangle$ Linearform.

$\Rightarrow Y = \langle y, X \rangle$ ist Gaußsch (\mathbb{R} -wertig)

$\Rightarrow \varphi_Y(\xi) = \exp(i\alpha\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$\alpha = E(Y) = E(\langle y, X \rangle) = \langle y, E(X) \rangle = \langle y, m \rangle$ und

$\sigma^2 = \text{var}(Y) = E(\langle y, X - m \rangle^2) = \langle y, Cy \rangle \geq 0$

$$\Rightarrow \varphi_Y(\xi) = E(e^{i\xi Y}) = E(e^{i\xi \langle y, X \rangle})$$

$$\Rightarrow \varphi_X(y) = E(e^{i \langle y, X \rangle}) = \varphi_Y(1) = \exp(i\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$= \exp(i \langle y, m \rangle - \frac{1}{2} \langle y, Cy \rangle) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) \Rightarrow (i): X mit $P_X = \mu$

$$E(e^{i \langle y, X \rangle}) = \varphi_X(y) = \hat{\mu}(y) = \exp(i \langle y, m \rangle - \frac{1}{2} \langle y, Cy \rangle)$$

für alle $y \in \mathbb{R}^d$.

Sei h linear: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $h(\cdot) = \langle y, \cdot \rangle$ und $Y = h(X) = \langle y, X \rangle$.

$$\Rightarrow \varphi_Y(\xi) = E(e^{i\xi Y}) = E(e^{i\xi \langle y, X \rangle}) = E(e^{i \langle \xi y, X \rangle}) = \varphi_X(\xi y)$$

$$= \exp(i\xi \underbrace{\langle y, m \rangle}_{\alpha} - \frac{1}{2} \xi^2 \underbrace{\langle y, Cy \rangle}_{\sigma^2}) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

$\Rightarrow Y$ ist normalverteilt mit Erwartungswert $\langle y, m \rangle$ und Varianz $\langle y, Cy \rangle \geq 0$. □

Beispiele 9.3. für Gauß-Prozesse

- a) Ist $(X_t)_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)_t$ Gaußsch, so auch $(X_t^i)_t$ für jedes i .
- b) Ist $(Y_t)_t$ äquivalent zu einem Gauß-Prozeß, so ist es selbst einer.
- c) Ist $f : J \rightarrow I$ eine beliebige Abbildung ("Umsortierung der Zeit") und $(X_t)_{t \in I}$ Gaußsch, so auch $(X_{f(s)})_{s \in J}$.

Satz 9.4.

- (i) Jeder Gauß-Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ auf \mathbb{R}^1 ist durch seine Erwartungsfunktion $m : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto m(t) = E(X_t)$ und seine Kovarianzfunktion $\Gamma : I \times I \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto \Gamma(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$ bis auf Äquivalenz eindeutig festgelegt. Γ ist als Funktion stets symmetrisch und positiv semidefinit.
- (ii) Zu jeder Funktion $m : I \rightarrow \mathbb{R}$ und jeder symmetrischen, positiv semidefiniten Funktion $\Gamma : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert ein Gauß-Prozeß mit m als Erwartungsfunktion und Γ als Kovarianzfunktion.

Hierbei heißt eine Funktion $\Gamma : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ positiv semidefinit, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t_1, \dots, t_k \in I$ die Matrix

$$(\Gamma(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,k} \quad \text{positiv semidefinit ist.}$$

Beweis:

- (i) Jeder Prozeß (X_t) ist bis auf Äquivalenz durch die endlich-dimensionalen Verteilungen $P_{X_{t_1}, \dots, X_{t_k}}$ bestimmt ($k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in I$). Jede dieser Verteilungen ist ein Gauß-Maß auf \mathbb{R}^k und damit durch $m(t_i)$ für $i = 1, \dots, k$ und

$$\Gamma(t_i, t_j) = \text{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, k$$

eindeutig festgelegt.

Stets ist $\Gamma(t_i, t_j) = \Gamma(t_j, t_i)$, und für alle $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ (o.B.d.A. $m \equiv 0$) ist

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \Gamma(t_i, t_j) \lambda_j &= \sum_{i,j} \lambda_i E(X_{t_i} \cdot X_{t_j}) \lambda_j \\ &= E \left(\sum_{i,j=1}^k \lambda_i X_{t_i} X_{t_j} \lambda_j \right) = E \left(\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t_i} \right)^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

- (ii) Seien m und Γ gegeben, definiere eine projektive Familie $(P_J)_{J_{\text{endlich}} \subset I}$:
 Für $J = (t_1, \dots, t_k)$ sei P_J das Gauß-Maß auf \mathbb{R}^k mit Erwartungsvektor $m_J = (m(t_1), \dots, m(t_k))$ und Kovarianzmatrix $C_J = (\Gamma(t_i, t_j))_{i,j=1, \dots, k}$.
 Behauptung: Für alle H endlich $\subset I$ mit $H = (t_1, \dots, t_{k+l}) \subset J$ gilt

$$\Pi_J^H(P_H) = P_J \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \Pi_J^H(\widehat{P_H})(\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{= x \in \mathbb{R}^k}) &= \int_{\mathbb{R}^{k+l}} e^{i \langle x, \Pi_J^H(y) \rangle} P_H(dy) \\ &\quad \text{mit } \bar{x} := (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k+l} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k+l}} e^{i \langle \bar{x}, y \rangle} P_H(dy) = \exp \left(i \langle \bar{x}, m_H \rangle - \frac{\langle \bar{x}, C_H \bar{x} \rangle}{2} \right) \\ &= \exp \left(i \langle x, m_J \rangle - \frac{1}{2} \langle x, C_J x \rangle \right) = \widehat{P_J}(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (*)$

$\Rightarrow (P_J)_{J_{\text{endlich}} \subset I}$ ist projektive Familie

\Rightarrow (Satz von Kolmogorov)

es existiert ein projektiver Limes $P_I = \lim_{\leftarrow J} P_J$ auf $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}(\mathbb{R})^I)$.

\Rightarrow Die Projektionen $(\Pi_t)_{t \in I}$ bilden bezüglich $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}(\mathbb{R})^I, P_I)$ den gesuchten Gauß-Prozeß. □

Wichtig hierbei: I ist beliebig!

Definition 9.5. Sei $(X_t)_t$ ein reellwertiger Prozeß.

$(X_t)_t$ heißt **standardisierte Brownsche Bewegung**, falls es ein zentrierter Gauß-Prozeß mit Kovarianzfunktion $\Gamma(s, t) = s \wedge t$ und mit fast sicher stetigen Pfaden ist.

Beispiele 9.6. für Gauß-Prozesse

1. Weißes Rauschen

I beliebig, $\Gamma(s, t) = \delta_0(s - t)$, $m(t) = 0$

- Γ ist positiv semidefinit, denn

$$\sum_{i,j=1}^k \Gamma(t_i, t_j) \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \geq 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in I$ verschieden und alle $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

- Der zugehörige Gauß-Prozeß $(Y_t)_{t \in I}$ heißt **Weißes Rauschen mit Parametermenge I** .
- Es gilt $\text{var}(Y_t) = 1$ für alle $t \in I$ und $\text{cov}(Y_s, Y_t) = 0$ für alle $s \neq t$.
 $\Rightarrow Y_s$ unabhängig von Y_t für alle $s \neq t$, denn unkorrelierte Gaußsche ZV sind unabhängig!

Intuitiv gilt im Falle $I = \mathbb{R}_+$:

$(Y_t)_{t \geq 0}$ Weißes Rauschen, dann ist $\left(\int_0^t Y_s ds\right)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung,

oder wenn $(X_t)_{t \geq 0}$ Brownsche Bewegung ist, dann ist $(\dot{X}_t)_{t \geq 0}$ Weißes Rauschen.

Achtung! Es treten Probleme auf.

- Für jede Brownsche Bewegung $(X_t)_{t \geq 0}$ gilt für fast alle $\omega : t \mapsto X_t(\omega)$ ist nirgends differenzierbar (siehe Korollar 14.2)
- Für jede Version des Weißes Rauschens $(Y_t)_t$ gilt: $(\omega, t) \mapsto Y_t(\omega)$ ist nicht $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -meßbar und damit nicht integrierbar.

2. Integrale der Form des Weißes Rauschens

(bzw. distributive Form der Brownschen Geschwindigkeit)

(E, \mathcal{E}, μ) beliebiger Maßraum,

$I = \{T \in \mathcal{E} : \mu(T) < \infty\}$,

$\Gamma(S, T) = \mu(S \cap T) \quad m(T) = 0$.

- positiv semidefinit, denn für alle k , alle $T_1, \dots, T_k \in I$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}^k$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^k \Gamma(T_i, T_j) \lambda_i \lambda_j &= \int \left(\sum_{i,j=1}^k \mathbf{1}_{T_i} \mathbf{1}_{T_j} \lambda_i \lambda_j \right) d\mu \\ &= \int \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{T_i} \lambda_i \right)^2 d\mu \geq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow es existiert ein Gauß-Prozeß $(Y_T)_{T \in I}$ mit $\text{var}(Y_T) = \mu(T)$ und $\text{cov}(Y_S, Y_T) = \mu(S \cap T)$.

Insbesondere: Y_S und Y_T unabhängig, falls $\mu(S \cap T) = 0$.

Man nennt Y auch "Gauß-Maß" mit "Intensität μ ": $Y(\omega) : I \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- Speziell $(E, \mathcal{E}, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda^1)$
 $\Rightarrow (Y_{[0,t]})_{t \geq 0}$ ist eine Version der standardisierten Brownschen Bewegung, denn

$$E(Y_{[0,s]} \cdot Y_{[0,t]}) = \lambda^1([0,s] \cap [0,t]) = s \wedge t.$$

- Ähnliche Konstruktion für $I = L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ und

$$\begin{aligned}\Gamma(u, v) &= \int_E u(t)v(t)\mu(dt) \\ \Rightarrow Y_u &=: \int_0^\infty u(t)dX_t.\end{aligned}$$

3. Brownsches Blatt (Brownian Sheet)

$$I = \mathbb{R}_+^2 = [0, \infty[\times [0, \infty[$$

$$\Gamma(s, t) = (s_1 \wedge t_1) \cdot (s_2 \wedge t_2) \text{ für } s = (s_1, s_2) \text{ und } t = (t_1, t_2).$$

Man kann zeigen:

- Γ ist positiv semidefinit,
- der zugehörige Gauß-Prozeß $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+^2}$ besitzt eine stetige Version (mit Kolmogorov-Chentsov).

Diese heißt **Brownsches Blatt**, ist also ein \mathbb{R} -wertiger stetiger Prozeß mit zwei Zeit-Parametern.

4. Brownsche Brücke (Brownian Bridge)

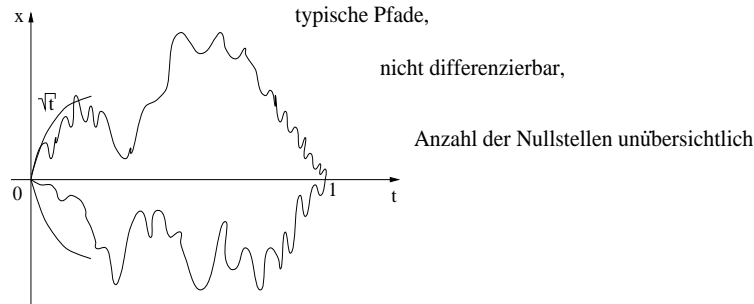
$$I = [0, 1], \Gamma(s, t) = s \wedge t - s \cdot t$$

Definition 9.7. Ein Prozeß $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ mit Werten in \mathbb{R}^1 heißt (eindimensionale) **standardisierte Brownsche Brücke** oder **Brownsche Brücke von $X_0 = 0$ nach $X_1 = 0$** , falls

- $(Y_t)_t$ ist zentrierter Gauß-Prozeß,
- Kovarianzfunktion $\Gamma(s, t) = s \wedge t - s \cdot t$,
- fast sicher stetige Pfade.

Satz 9.8.

- Wenn $(X_t)_{t \geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung ist, dann ist $(X_t - tX_1)_{t \in [0,1]}$ eine standardisierte Brownsche Brücke.
- Ebenso ist der Prozeß $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ mit $Y_1 = 0$ und $Y_t = (1-t)X_{\frac{t}{1-t}}$ eine standardisierte Brownsche Brücke.
- Ist $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ eine standardisierte Brownsche Brücke, so ist $((1+t) \cdot Y_{\frac{t}{1+t}})_{t \geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung.
- Für jede standardisierte Brownsche Brücke $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ ist $(Y_{1-t})_{t \in [0,1]}$ wieder eine standardisierte Brownsche Brücke. Es gilt $Y_0 = Y_1 = 0$ fast sicher.



Beweis:

(i): Sei $Y_t = X_t - t \cdot X_1$ der so definierte Prozeß. Dann gilt: $(Y_t)_{t \geq 0}$ ist ein zentrierter Gauß-Prozeß mit fast sicher stetigen Pfaden.

Denn: Für alle $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i Y_{t_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t_i} - \left(\underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i t_i}_{\text{Gaußsche ZV}} \right) X_1.$$

$\Rightarrow (Y_t)_t$ ist Gauß-Prozeß.

$$\begin{aligned} \text{Kovarianz } E(Y_s \cdot Y_t) &= E(X_s \cdot X_t) - sE(X_1 \cdot X_t) - tE(X_s \cdot X_1) + stE(X_1^2) \\ &= s \wedge t - 2st + st = s \wedge t - st = \Gamma(s, t). \end{aligned}$$

(ii),(iii): Übungen.

(iv): trivial. □

Bemerkung: Ist $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ eine standardisierte Brownsche Brücke, so ist $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0,1]} = (x_0 + t(x_1 - x_0) + Y_t)_{t \in [0,1]}$ eine Brownsche Brücke von $\tilde{Y}_0 = x_0$ nach $\tilde{Y}_1 = x_1$. Das ist ein fast sicher stetiger Gauß-Prozeß mit Erwartungsfunktion $m(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ und Kovarianzfunktion wie eben.

Ausdehnung von $t \in [0, 1]$ auf $t \in [t_0, t_1]$ und auf \mathbb{R}^d -wertig statt \mathbb{R} -wertig ist möglich.

5. Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

$$I = \mathbb{R}_+, \Gamma(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|s - t|)$$

\Rightarrow es existiert ein stetiger Gauß-Prozeß (genauer: zentriert und mit fast sicher stetigen Pfaden) $(Y_t)_{t \geq 0}$, genannt **Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß**.

Daß es ihn gibt, sagt folgender Satz:

Satz 9.9. Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ standardisierte Brownsche Bewegung.

Dann ist $(e^{-\alpha t} X_{\sigma^2 \exp(2\alpha t)})_{t \geq 0}$ ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß.

Beweis: $E(Y_s \cdot Y_t) = \Gamma(s, t)$ □

Teil III

Markov-Prozesse

Kapitel 10

Markov-Kerne und Markov-Übergangsfamilien

Gegeben: (E_1, \mathcal{B}_1) und (E_2, \mathcal{B}_2) Meßräume.

Definition 10.1. Eine Abbildung

$K : E_1 \times \mathcal{B}_2 \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Kern** von (E_1, \mathcal{B}_1) nach (E_2, \mathcal{B}_2) , falls

1. $x_1 \mapsto K(x_1, B_2)$ \mathcal{B}_1 -meßbar für alle $B_2 \in \mathcal{B}_2$,

2. $B_2 \mapsto K(x_1, B_2)$ Maß auf (E_2, \mathcal{B}_2) für alle $x_1 \in E_1$.

K heißt **Markov-Kern**, falls $K(x_1, \cdot)$ W -Maße sind für alle x_1 .

Meist $(E_i, \mathcal{B}_i) = (E, \mathcal{B})$, d.h. K ist Kern auf (E, \mathcal{B}) .

Bemerkungen:

a) Jeder Markov-Kern von (E_1, \mathcal{B}_1) nach (E_2, \mathcal{B}_2) definiert durch

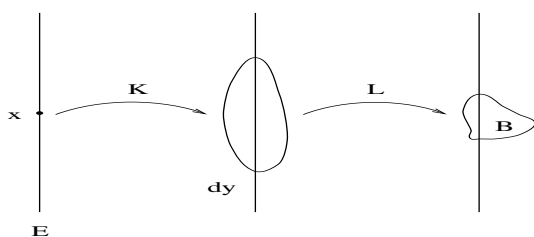
$$Kf(x) := \int f(y)K(x, dy)$$

eine stetige, positivitatserhaltende Abbildung $K : \mathcal{B}_2^b \rightarrow \mathcal{B}^b$ wobei \mathcal{B}_i^b die Menge der beschränkten \mathcal{B}_i -meßbaren Funktionen $f : E_i \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet.

b) Die Menge aller Markov-Kerne auf (E, \mathbb{R}) bildet eine Halbgruppe mit neutralem Element $I(x, B) = \mathbf{1}_B(x) = \delta_x(B)$ (“Einheitskern”) und Verknüpfung

$$(K \circ L)(x, B) = \int_E K(x, dy)L(y, B)$$

(“Komposition“)



Offenbar ist die Verknüpfung assoziativ $(K \circ L)f(x) = K(Lf)(x)$.

Definition 10.2.

a) Sei $I = \mathbb{R}_+$ oder $I = \mathbb{N}_0$. Eine Familie $(K_{s,t})_{\substack{s,t \in I \\ s \leq t}}$ von Markov-Kernen auf (E, \mathcal{B}) heißt **Markovsche Übergangsfamilie**, falls

$$(*) \quad K_{r,t} = K_{r,s} \circ K_{s,t} \quad \text{für alle } r \leq s \leq t$$

(“Chapman-Kolmogorov-Gleichung“).

b) Die Markovsche Übergangsfamilie $(K_{s,t})_{s \leq t}$ heißt **zeitlich homogen**, falls $K_{s,t} = K_{0,t-s}$ für alle $s, t, s \leq t$.

Schreibweise: K_t statt $K_{0,t}$ und damit

$$(*) \quad K_{s+t} = K_s \circ K_t \quad \text{für alle } s, t.$$

In diesem Fall ist $(K_t)_{t \geq 0}$ eine Halbgruppe (“Markovsche Halbgruppe“). Insbesondere gilt dann: $K_s \circ K_t = K_t \circ K_s$.

c) Die Markovsche Übergangsfamilie $(K_{s,t})_{s \leq t}$ heißt **räumlich homogen (oder translationsinvariant)**, falls

$$K_{s,t}(x, B) = K_{s,t}(0, B - x).$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß E Gruppe ist, z.B. \mathbb{R}^d oder \mathbb{Z}^d .

Beispiele 10.3. von Markovschen Übergangsfamilien:

a) $E = \mathbb{R}^d$

In typischen Fällen ist $K_{s,t}$ gegeben durch eine “Übergangsdichte“ $k(s, x, t, y)$

(nicht-negativ für alle $t \geq s$,

normiert: $\int k(x, s, t, y) dy = 1,$

für alle $t \geq s$ und alle $x, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$ -meßbar für alle $t \geq s$)

$$K_{s,t}(x, B) = \int_B k(s, x, t, y) dy$$

(*) lautet dann für λ -fast alle z

$$k(r, x, t, z) = \int_{\mathbb{R}^d} k(r, x, s, y) k(s, y, t, z) dy$$

b) E abzählbar. Für alle $s \leq t$ existiert eine stochastische Matrix

$$k(s, i, t, j)_{i,j \in E} \text{ (mit } \sum_j k(s, i, t, j) = 1 \text{ als Zeilensumme),}$$

$$K(s, i, t, B) = \sum_{j \in B} k(s, i, t, j).$$

c) $I = \mathbb{N}_0$, $K_{s,t} = K_{t-s}$ zeitlich homogen
 \Rightarrow es existiert Markov-Kern K , so daß für $s < t$:

$$K_{s,t} = K^{t-s} \quad (= \underbrace{K \circ K \circ \dots \circ K}_{t-s})$$

(nämlich: $K = K_{0,1}$).

d) (E, \mathcal{B}) beliebig, μ W-Maß darauf

$$K_{s,t}(x, B) := \mu(B) \quad (\text{zeitlich homogen}).$$

Beachte: $K_0 \neq I$ (es sei denn, B trivial).

Proposition 10.4. Sei $E = \mathbb{R}^d$ und $I = \mathbb{R}_+$.

a) Ist $(K_{s,t})_{s \leq t}$ eine zeitlich und räumlich homogene Markovsche Übergangsfamilie, so definiert $\mu_t(B) := K_{0,t}(0, B)$ eine **Faltungshalbgruppe** von W-Maßen $(\mu_t)_{t \geq 0}$ auf \mathbb{R}^d .

Denn:

$$\begin{aligned} \mu_{s+t}(B) &= K_{0,s+t}(0, B) \\ &= \int K_{0,s}(0, dy) K_{s,s+t}(y, B) \\ &= \int \mu_s(dy) \mu_t(B - y) \\ &= (\mu_s * \mu_t)(B) \quad \text{nach der Definition der Faltung.} \end{aligned}$$

b) Umgekehrt gilt: Jede Faltungsgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ von W-Maßen auf \mathbb{R}^d , definiert durch

$$K_{s,t}(x, B) = \mu_{t-s}(B - x)$$

eine räumlich und zeitlich homogene Markovsche Übergangsfamilie.

Satz 10.5. Sei $I = \mathbb{R}_+$, $(K_{s,t})_{s \leq t}$ eine Markovsche Übergangsfamilie und ein W -Maß μ auf einem Meßraum (E, \mathcal{B}) . Für $J = \{t_1, \dots, t_n\} \subset I$ mit $t_1 < \dots < t_n$ und $B \in \mathcal{B}^J$ sei

$$P_J(B) = \int \dots \int \mathbb{1}_B(x_1, \dots, x_n) K_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}, dx_n) \dots K_{0, t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0).$$

Dann ist $(P_J)_{J \subset I, J \text{ endlich}}$ eine projektive Familie.

Beweis:

Offenbar ist P_J ein Maß auf (E^J, \mathcal{B}^J) mit $P_J(E^J) = 1$.

Zu zeigen ist die Projektivität (= Konsistenz)

$$\text{D.h. } \Pi_J^H = P_J \quad \text{für alle } H \supset J, J, H \text{ endlich } \subset I.$$

O.B.d.A.: $J = \{t_1, \dots, t_n\}$ und $H = J \cup \{t'\}$ sowie $t_1 < t' < t_n$, etwa $t_i < t' < t_{i+1}$.

Zeige: $P_H((\Pi_J^H)^{-1}(B)) = P_J(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}^J$.

O.B.d.A.: $B = B_1 \times \dots \times B_n$.

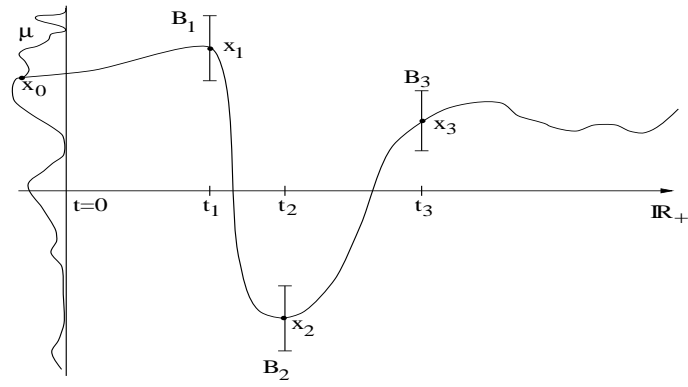
Aber:

$$\begin{aligned} P_H((\Pi_J^H)^{-1}(B)) &= P_H(B_1 \times \dots \times B_i \times E \times B_{i+1} \times \dots \times B_n) \\ &= \int \dots \int \mathbb{1}_{B_1 \times \dots \times B_i \times E \times B_{i+1} \times \dots \times B_n}(x_1, \dots, x_i, x', x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad \cdot K_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}, x_n) \cdot \dots \cdot K_{t', t_{i+1}}(x', dx_{i+1}) \\ &\quad \cdot K_{t_i, t'}(x_i, dx') \cdot \dots \cdot K_{0, t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= \int \dots \int \mathbb{1}_{B_1 \times \dots \times B_n}(x_1, \dots, x_n) K_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}, dx_n) \\ &\quad \cdot \dots \cdot K_{t_i^0, t_{i+1}}(x_i, dx_{i+1}) \dots K_{0, t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= P_J(B), \end{aligned}$$

$$\text{denn: } \int_E K_{t', t_{i+1}}(x', dx_{i+1}) K_{t_i, t'}(x_i, dx') = K_{t_i, t_{i+1}}(x_i, dx_{i+1}). \quad \square$$

Bemerkung: Falls $B = B_1 \times \dots \times B_n$

$$P_J(B) = \int_E \int_{B_1} \int_{B_2} \dots \int_{B_n} K_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}, dx_n) \cdot \dots \cdot K_{t_1, t_2}(x_1, dx_2) K_{0, t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0)$$



Kapitel 11

Faltungshalbgruppen und Lévy-Prozesse

Ab jetzt sei $E = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$.

Definition 11.1. Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozeß (auf irgendeinem W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P)).

a) X heißt **Prozeß mit stationären Zuwächsen**, falls

$$P_{X_{t+r} - X_{s+r}} = P_{X_t - X_s}$$

für alle $r, s, t \in \mathbb{R}_+$.

b) X heißt **Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen**, falls $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängige ZV für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

c) Prozesse mit stationären und unabhängigen Zuwächsen heißen **Lévy-Prozesse**.

Satz 11.2.

a) Jeder Lévy-Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ (definiert auf einem W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P)) definiert eindeutig durch

$$\mu = X_0(P) \tag{11.1}$$

ein W -Maß, genannt **Startverteilung**, auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, und durch

$$\mu_t = (X_t - X_0)(P), \quad t \geq 0 \tag{11.2}$$

eine Faltungshalbgruppe von W -Maßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

- b) Der zu einer Startverteilung μ und einer Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konstruierte kanonische Prozeß $(\Pi_t)_{t \geq 0}$, definiert auf $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+}, \lim P_J)$, ist stets ein Lévy-Prozeß und erfüllt die Gleichungen 15.2 und 11.2.
- c) Jeder andere Lévy-Prozeß, der die Gleichungen 15.2 und 11.2 erfüllt, ist äquivalent zum kanonischen Prozeß.

Zusatz: Bezeichnet P^μ das W-Maß auf $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+}$ zur Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_t$ und Startverteilung μ , so gilt

$$P^\mu = \int P^{x_0} \mu(dx_0) \quad (P^{x_0} = P^{\delta_{x_0}}).$$

Beweis:

- a) Zu zeigen ist $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$.
Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse gilt

$$\begin{aligned} \mu_{s+t} &= P_{X_{s+t}-X_0} \\ &= P_{(X_{s+t}-X_t)+(X_t-X_0)} \\ &= P_{X_{s+t}-X_t} * P_{X_t-X_0} \quad (\text{wegen Unabhängigkeit}) \\ &= P_{X_s-X_0} * P_{X_t-X_0} \quad (\text{da stationär}) \\ &= \mu_s * \mu_t \quad \text{per Definition.} \end{aligned}$$

- b) Aus $(\mu_t)_t$ wird $(K_{s,t})_{s \leq t}$ und daraus $(P_J)_{J \text{ endlich } \subset I}$. Der projektive Limes $P_I = \lim_{\leftarrow} P_J$ definiert den kanonischen Prozeß $(\Pi_t)_t$.

- $(\Pi_t)_t$ hat stationäre Zuwächse, denn

$$\begin{aligned} P_I(\Pi_t - \Pi_s \in B) &= P(X_t - X_s \in B) = P_{X_t-X_s}(B) \\ &= \int \int \int \mathbb{1}_B(x_L - x_1) K_{s,t}(x_1, dx_L) K_{0,s}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= \int \int K_{s,t}(x_1, x_1 + B) K_{0,s}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= \mu_{t-s}(B) \int \int K_{0,s}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= \mu_{t-s}(B). \end{aligned}$$

Für $s = t$ gilt $P_{X_t-X_s} = \delta_0 = \mu_0$, denn $(\mu_t)_{t \geq 0}$ ist Faltungshalbgruppe und damit $\mu_0 = \delta_0$.

- $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ hat unabhängige Zuwächse.

Denn: sei $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $Y = \bigotimes_{i=0}^n Y_i$ mit $Y_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $Y_0 = X_{t_0}$ und $A = A_0 \times \dots \times A_n$ mit $A_i \in \mathcal{B}$.

Zu zeigen: $P(Y \in A) = \prod_{i=0}^n P(Y_i \in A_i)$.

Sei zunächst $t_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
P(Y \in A) &= \int \mathbf{1}_A \circ Y dP \\
&= \int \mathbf{1}_{A_0}(X_{t_0}) \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) dP \\
&= \int \mathbf{1}_{A_0}(x_0) \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(x_i - x_{i-1}) P_{X_0, X_1, \dots, X_n}(x_0, x_1, \dots, x_n) \\
&= \int \dots \int \mathbf{1}_{A_0}(x_0) \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(x_i - x_{i-1}) \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n - x_{n-1}) \\
&\quad \dots \mu_{t_1 - t_0}(dx_1 - x_0) \mu(dx_0) \\
&= \int \dots \int \mathbf{1}_{A_0}(x_0) \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(x_i) \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n) \dots \mu_{t_1 - t_0}(dx_1) \mu(dx_0) \\
&= \mu_{t_n - t_{n-1}}(A_n) \cdot \dots \cdot \mu_{t_1 - t_0}(A_1) \cdot \mu(A_0) \\
&= P_{Y_n}(A_n) \cdot \dots \cdot P_{Y_1}(A_1) \cdot P_{Y_0}(A_0).
\end{aligned}$$

Im Fall $t_0 > 0$ wähle $t_{-1} = 0$, $Y_{-1} = X_0$, $A_0 = E$,
 \rightarrow obiger Fall mit verschobenen Indizes $i \rightarrow i \pm 1$.

c) trivial □

Lemma 11.3. Für jede Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ von W -Maßen auf \mathbb{R}^d gilt:

$$\mu_0 = \delta_0.$$

Beweis: mit Fourier-Transformation [siehe Bauer]. □

Beispiele 11.4. von Faltungshalbgruppen

1. Brownsche Halbgruppe im \mathbb{R}^d

Für $t > 0$ sei $\nu_t(dx) = g_t(x)dx$ mit

$$g(x) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) \quad \text{“Gaußkern“, wobei } |x|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2.$$

Für $t = 0$ sei $\nu_0 = \delta_0$.

Für $d = 1$ ist $\nu_t = \nu_t^{(1)}$ die Normalverteilung auf \mathbb{R} mit Mittelwert 0 und Varianz t .

Für allgemeines $d \in \mathbb{N}$ ist offenbar

$$\nu_t^{(d)} = \nu_t^{(1)} \otimes \dots \otimes \nu_t^{(1)}.$$

Proposition 11.5. Für jedes $d \in \mathbb{N}$ ist $(\nu_t)_{t \geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe von W -Maßen auf \mathbb{R}^d .

Beweis:

(1) durch Nachrechnen.

(2) Reduktion auf $d = 1$ und Verwenden von:

$X + Y$ ist ν_{s+t} -verteilt, falls X, Y unabhängig und X ν_s -verteilt, Y ν_t -verteilt
($\Leftrightarrow \nu_{s+t} = \nu_s * \nu_t$).

(3) Mit Hilfe der Fourier-Transformation

$$\hat{\nu}_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \nu_t(d\xi) = e^{-\frac{t}{2}|x|^2}$$

$$\Rightarrow \nu_t * \nu_s = \hat{\nu}_t \cdot \hat{\nu}_s$$

$$\hat{\nu}_t(x) \cdot \hat{\nu}_s(x) = e^{-\frac{t}{2}|x|^2} e^{-\frac{s}{2}|x|^2} = e^{-\frac{s+t}{2}|x|^2} = \hat{\nu}_{s+t}(x)$$

$$\Rightarrow \nu_t * \nu_s = \nu_{s+t}.$$

□

Der zugehörige Prozeß heißt “Rohversion der Brownschen Bewegung“.

Genauer: Jede Version eines solchen Prozesses mit fast sicher stetigen Pfaden ist eine Brownsche Bewegung.

2. Gleichmäßige Bewegung auf \mathbb{R}

Faltungshalbgruppe $(\delta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (siehe Übungen, Serie II)

3. Poisson-Prozeß auf \mathbb{R} (oder \mathbb{Z})

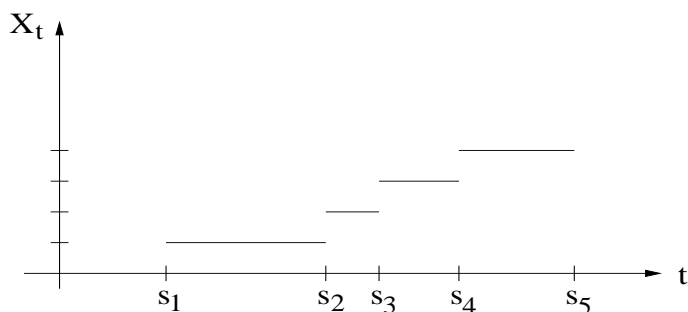
$$\mu_0 = \delta_0 \quad \mu_t = \sum_{k \geq 0} e^{-t} \frac{t^k}{k!} \delta_k \quad \text{“Poisson-Verteilung“}$$

$(\mu_t)_{t \geq 0}$ ist Faltungshalbgruppe (denn X, Y unabhängig, X Π_s -verteilt, Y Π_t -verteilt $\Rightarrow X + Y$ ist Π_{s+t} -verteilt).

Poisson-Halbgruppe mit Parameter λ : $(\mu_{\lambda t})_{t \geq 0}$.

Satz 11.6. Zu gegebener Startverteilung μ und Poissonhalbgruppe existiert eine Version $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{N}_0 und folgender Eigenschaft:

Für fast alle $\omega \in \Omega$ ist $t \mapsto X_t(\omega)$ isoton, rechtsseitig stetig und hat Sprünge der Größe 1, d.h. für alle $t \in]0, \infty[$: $X_t(\omega) - \lim_{s \nearrow t} X_s(\omega) \in \{0, 1\}$.



Beweis:

Seien $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige ZV, exponentiell verteilt mit Parameter λ , d.h.

$$P(\xi_i \in A) = \lambda \int_A e^{-\lambda x} dx \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

und sei, mit $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$,

$$X_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}} = \max\{n : S_n \leq t\}.$$

Dann ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson-Prozeß (nach WTI, Serie 7, Aufgabe 2b)!) □

Interpretation:

X_t ist die Anzahl der Signale, die ein vom Zufall gesteuerter Sender im Zeitintervall $[0, t]$ aussendet.

Satz 11.7. Für jeden Poisson-Prozeß $(X_t)_t$ zum Parameter $\lambda > 0$ gilt:

(i) $t \mapsto X_t(\omega)$ ist in allen $t_0 \in \mathbb{R}_+$ stetig, und zwar für fast alle $\omega \in \Omega$.

(ii) Für P -fast alle $\omega \in \Omega$ besitzt $t \mapsto X_t(\omega)$ unendlich viele Sprünge (der Größe 1).

Beweis:

zu (i) Sei $A = \{\omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ un stetig in } t_0\}$ für fixes $t_0 > 0$. Der Prozeß ist rechtsseitig stetig, also bedeutet $t_0 > 0$ keine Einschränkung. A ist meßbar, denn

$$A = \bigcap_{\substack{s < t_0 \\ s \in \mathbb{Q}}} \{X_{t_0} - X_s \geq 1\}$$

Annahme (o.B.d.A.): Für alle ω ist $t \mapsto X_t(\omega)$ isoton, rechtsseitig stetig mit Sprüngen der Größe 1.

$$\begin{aligned} P(A) &\leq \underbrace{P\{X_{t_0} - X_s \geq 1\}}_{= \Pi_{t_0-s}^\lambda(\{1, 2, \dots\})} = 1 - e^{-\lambda(t_0-s)} \\ &= \Pi_{t_0-s}^\lambda(\{1, 2, \dots\}) \end{aligned}$$

\Rightarrow für $s \rightarrow t_0 : P(A) = 0$.

zu (ii) Es gilt

$$P(X_n - X_{n-1} \geq 1 \text{ unendlich oft}) = 1.$$

Denn: nach Borel-Cantelli genügt:

$$P(X_n - X_{n-1} \geq 1) = 1 - e^{-\lambda} > 0$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$ Behauptung. □

4. Einseitig stabile Faltungshalbgruppe auf \mathbb{R}_+

Für $0 < \alpha \leq 2$ und $t > 0$ existiert genau ein W-Maß η_t^α auf \mathbb{R}_+ mit Laplace-Transformation

$$\eta_t^\alpha(x) = \exp(-t|x|^{\frac{\alpha}{2}}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+.$$

Es gilt: $(\eta_t^\alpha)_{t \geq 0}$ ist Faltungshalbgruppe.

Sie heißt **einseitig stabile Halbgruppe** der Ordnung α .

Für $\alpha = 2$: $\eta_t^\alpha = \delta_t$.

5. Symmetrische stabile Halbgruppe auf \mathbb{R}^d

Sei $0 < \alpha \leq 2$, $d \in \mathbb{N}$ und $t > 0$. Es existiert genau ein W-Maß ν_t^α auf \mathbb{R}^d mit Fourier-Transformierter

$$\hat{\nu}_t^\alpha(x) = \exp\left(-t \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Offenbar ist $(\nu_t)_{t \geq 0}$ Faltungshalbgruppe, denn

$$\hat{\nu}_{s+t}^\alpha = \hat{\nu}_s^\alpha \cdot \hat{\nu}_t^\alpha.$$

Es gilt:

$\alpha = 2$: $(\nu_t^\alpha)_t$ = Brownsche Halbgruppe

$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 : \\ d = 1 : \end{array} \right\} \nu_t^1 = \text{Cauchy-Verteilung, d.h. } \nu_t^1(dx) = \frac{t}{\Pi(t^2+x^2)} dx \text{ auf } \mathbb{R}.$

Bemerkungen:

1. Es gibt keine Version mit stetigen Pfaden für $\alpha \neq 2$.
2. Es gibt Versionen mit: $t \mapsto X_t(\omega)$ fast sicher rechtsseitig stetig und linke Limiten existieren.
3. Jede solche Version heißt α -stabiler symmetrischer Prozeß.
4. Für α -stabile Prozesse gilt wie eben:
 - (i) Für alle t_0 : P -fast sicher ist $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig in t_0 .
 - (ii) P -fast sicher: $t \mapsto X_t(\omega)$ hat unendlich viele Sprünge.

Kapitel 12

Markov-Prozesse

$(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ sei ein filtrierter W-Raum.

Definition 12.1. Ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ heißt **Markov-Prozeß**, falls

$$(*) \quad P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) = P(X_t \in B | X_s) \quad P\text{-fast sicher}$$

für $s, t \in I$ mit $s \leq t$ und für $B \in \mathcal{B}$.

(*) heißt **Elementare Markov-Eigenschaft**.

Proposition 12.2. Für einen stochastischen Prozeß $(X_t)_t$ mit kanonischer Filtration ist die elementare Markov-Eigenschaft äquivalent zu:

$$(**) \quad P(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) = P(X_t \in B | X_{s_n}) \quad P\text{-fast sicher}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in I$ mit $s_1 < \dots < s_n \leq t$ und $B \in \mathcal{B}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{“} \Rightarrow \text{“} : P(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) &= P(P(X_t \in B | \mathcal{F}_{s_n}^X) | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \\ &\stackrel{(*)}{=} P(P(X_t \in B | X_{s_n}) | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) = P(X_t \in B | X_{s_n}) \end{aligned}$$

“ \Leftarrow “ Zu zeigen:

$Y := P(X_t \in B | X_s)$ ist Version von $P(X_t \in B | \mathcal{F}_s^X)$ für alle $B \in \mathcal{B}$ und $s \leq t$.
 Y ist \mathcal{F}_s^X -meßbar, da Y $\sigma(X_s)$ -meßbar ist und wegen $\sigma(X_s) \subset \mathcal{F}_s^X$, und es gilt

$$(***) \quad \int_A Y dP = \int_A \mathbf{1}_B(X_t) dP \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_s^X,$$

da es wegen (**) für alle $A \in \sigma(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$ gilt und diese A zusammen einen \cap -stabilen Erzeuger von $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r : r \leq s)$ bilden (Maßfortsetzungen sind eindeutig).

Proposition 12.3. *Ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ ist genau dann ein Markov-Prozeß bezüglich der kanonischen Filtration, wenn die σ -Algebren $\sigma(X_s : s \geq t)$ (“der Zukunft“) und $\sigma(X_s : s \leq t)$ (“der Vergangenheit“) bedingt unabhängig sind unter der Hypothese $\sigma(X_t)$ (“der Gegenwart“).*

Beweis: in den Übungen.

Bemerkung: Jeder Markov-Prozeß $(X_t)_t$ bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ ist auch ein Markov-Prozeß bzgl. der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t^X)_t$; die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Beweis der Behauptung: wie bei (**).

Satz 12.4. *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein stochastischer Prozeß und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ seine kanonische Filtration. Ferner sei μ ein W -Maß auf (E, \mathcal{B}) und $(K_{s,t})_{s,t \in \mathbb{R}_+}$ eine Markovsche Übergangsfamilie auf (E, \mathcal{B}) . Dann sind äquivalent:*

(i) *Die endlich-dimensionalen Verteilungen $P_J = X_J(P)$ des Prozesses sind gegeben durch*

$$P_J(B) = \int \dots \int \mathbf{1}_B(x_1, \dots, x_n) K_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}, dx_n) \cdot \dots \cdot K_{0, t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0)$$

für alle $J = \{t_1, \dots, t_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \dots < t_n$, und alle $B \in \mathcal{B}^n$.

(ii) *(Reguläre) Versionen der bedingten Verteilungen $P(X_t \in \cdot | \mathcal{F}_s)$ für $s < t$ sind gegeben durch*

$$P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) = K_{s,t}(X_s, B) \quad P\text{-fast sicher} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

(“Schwache Markov-Eigenschaft“).

In diesem Fall ist $(X_t)_t$ mit $(\mathcal{F}_t)_t$ als Filtration ein Markov-Prozeß. Ferner gilt: Reguläre Versionen der faktorisierten bedingten Verteilungen $P(X_t \in \cdot | X_s = \cdot)$ sind gegeben durch

$$(***) \quad P(X_t \in B | X_s = x) := K_{s,t}(x, B)$$

für alle $x \in E$ und $B \in \mathcal{B}$.

(=“Übergangswahrscheinlichkeit von $X_s = x$ nach $X_t \in B$ “)

Sprechweise: $(X_t)_t$ ist Markov-Prozeß mit Startverteilung μ und Übergangsfamilie $(K_{s,t})_{s \leq t}$.

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): Für $0 \leq s < t$ muß gelten:

$$\begin{aligned} P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) &= K_{s,t}(X_s, B) \quad P\text{-fast sicher} \\ &\Downarrow \\ \int_A \mathbf{1}_B(X_t) dP &= \int_A K_{s,t}(X_s, B) dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_s. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_A K_{s,t}(X_s, B) dP &= \int \dots \int \mathbf{1}_B(x_1) \dots \mathbf{1}_B(x_n) \\ &\quad K_{s_n,t}(x_n, B) \cdot K_{s_{n-1},s_n}(x_{n-1}, dx_n) \cdot \dots \cdot K_{0,s_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= \int_A \mathbf{1}_B(X_t) dP \end{aligned}$$

für $A = X_J^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n)$ und $J = \{s_1, \dots, s_n\} \in \mathcal{F}_s$, $s_1 < \dots < s_n \leq s$.

(ii) impliziert: $P(X_t \in B | \mathcal{F}_s)$ ist $\sigma(X_s)$ -meßbar. Daher ist $P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) = P(P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) | X_s) = P(X_t \in B | X_s)$, und $(X_t)_t$ ist Markov-Prozeß bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$. Außerdem:

$$K_{s,t}(x, B) = P(X_t \in B | X_s = x)$$

für P_{X_s} -fast alle $x \in E$.

(ii) \Rightarrow (i): o.B.d.A. $n = 2$:

$$\begin{aligned} P(X_0 \in B_0, X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2) &= E(\mathbf{1}_{B_0}(X_0) \cdot \mathbf{1}_{B_1}(X_{t_1}) \cdot \mathbf{1}_{B_2}(X_{t_2})) \\ &= E(E(\mathbf{1}_{B_0}(X_0) \mathbf{1}_{B_1}(X_{t_1}) \mathbf{1}_{B_2}(X_{t_2}) | X_0)) \\ &= E(\mathbf{1}_{B_0}(X_0) \cdot E(\mathbf{1}_{B_1}(X_{t_1}) \cdot \mathbf{1}_{B_2}(X_{t_2}) | X_0)) \\ &= \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} K_{0,t_1}(x_0, dx_1) K_{t_1,t_2}(x_1, B_2), \end{aligned}$$

denn $\mu = P_{X_0}$ und

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{B_1}(X_{t_1}) \mathbf{1}_{B_2}(X_{t_2}) | X_0) &= E(E(\mathbf{1}_{B_1}(X_{t_1}) \mathbf{1}_{B_2}(X_{t_2}) | \mathcal{F}_{t_1}) | X_0) \\ &= E(\mathbf{1}_{B_1}(X_{t_1}) E(\mathbf{1}_{B_2}(X_{t_2}) | \mathcal{F}_{t_1}) | X_0) \\ &= E(\mathbf{1}_{B_1}(X_{t_1}) K_{t_1,t_2}(X_{t_1}, B_2) | X_0) \\ &= E(f(X_{t_1}) | X_0) \quad \text{mit } f(x) = \mathbf{1}_{B_1}(x) K_{t_1,t_2}(x, B_2) \\ &= \int f(x) K_{0,t_1}(X_0, dx) \\ &\quad \text{(nach Übergang } f = \mathbf{1}_{B_1}, \text{ dann } f \geq 0 \text{ in (***))} \\ &= \int_{B_1} K_{0,t_1}(X_0, dx) K_{t_1,t_2}(x, B_2) \end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

1. Obiger Satz besagt nicht, daß zu jeder Startverteilung μ und jeder Übergangsfamilie $(K_{s,t})$ ein Markov-Prozeß existiert mit $K_{s,t}(x, B) = P(X_t \in B | X_s = x)$ und $\mu(B) = P(X_0 \in B)$.

Richtig ist die Aussage, falls E polnisch ist.

2. Obiger Satz besagt nicht, daß für jeden Markov-Prozeß durch $K_{s,t}(x, B) = P(X_t \in B | X_s = x)$ eine Markov-Übergangsfamilie definiert wird. Die Eigenschaft

$$K_{r,t}(x, B) = \int K_{r,s}(x, dy) K_{s,t}(y, B)$$

gilt i.a. nur für P_{X_r} -fast alle $x \in E$.

(Das reicht aber eigentlich auch!)

Korollar 12.5. *Jeder Lévy-Prozeß auf \mathbb{R}^d , versehen mit seiner kanonischen Filtration, ist ein Markov-Prozeß.*

Beispiel 12.6. Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozeß auf (Ω, \mathcal{A}, P) und $\mathcal{F}_t = \mathcal{A}$ für $t \geq 0$, so ist $(X_t)_t$ kein Markov-Prozeß bzgl. (\mathcal{F}_t) .

Denn: $P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) = E(\mathbf{1}_B(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{1}_B(X_t)$ und $P(X_t \in B | X_s) = E(\mathbf{1}_B(X_t) | X_s)$, jeweils fast sicher; wäre $(X_t)_t$ Markov-Prozeß bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$, so wären beide gleich, d.h.

$$X_t \text{ ist } \sigma(X_s)\text{-meßbar}$$

und damit auch

$$X_t - X_s \text{ ist } \sigma(X_s)\text{-meßbar.}$$

Aber: $X_t - X_s$ unabhängig von X_s !

Markov auch nach Zeitumkehr $((X_{T-t})_{t \in [0, T]})$ und Stoppen $((X_{t \wedge T})_{t \geq 0})$.

Ab nun betrachten wir zeitlich homogene Markov-Übergangsfamilien. Es sind äquivalent:

- $(K_{s,t})_{s \leq t}$ ist zeitlich homogen,
- $K_{s,t} = P_{t-s}$ mit Markov-Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

Beachte: P_0 nicht notwendig Einheitskern I !

$(K_{s,t})_{s \leq t}$ bzw. $(P_t)_{t \geq 0}$ heißt **normal**, falls $K_{t,t} = I$ bzw. $P_0 = I$.

Definition 12.7. *Eine Familie $(P^x, X_t)_{x \in E, t \geq 0}$ heißt Markovsche Prozeßfamilie (auf (Ω, \mathcal{A})) mit Zustandsraum (E, \mathcal{B}) , falls*

(i) Für alle $x \in E$ ist $(X_t)_{t \geq 0}$ stochastischer Prozeß (auf $(\Omega, \mathcal{A}, P^x)$) mit Zustandsraum (E, \mathcal{B}) und $P^x(X_0 = x) = 1$.

(ii) $x \mapsto P^x(A)$ ist \mathcal{B} -meßbar für alle $A \in \mathcal{A}$.

(iii) Für alle $s, t \geq 0, x \in E$ und $B \in \mathcal{B}$ ist

$$P^x(X_{s+t} \in B | \mathcal{F}_s^0) = P^{X_s}(X_t \in B) \quad P^x\text{-fast sicher}$$

(“Universelle Markov-Eigenschaft“)

Zur Schreibweise: $P^{X_s}(X_t \in B)$ ist die ZV $\omega \mapsto P^{X_s(\omega)}(X_t \in B)$. Es ist eine Verkettung von $x \mapsto P^x(X_t \in B)$ und $\omega \mapsto X_s(\omega)$. Es ist nicht die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X_t \in B | X_s)$.

Statt $P^X(\cdot)$ schreibt man auch $P_X(\cdot)$; dann ist aber P_{X_s} nicht die Verteilung von X_s .

Bei der universellen Markov-Eigenschaft ist die linke Seite eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die rechte Seite eine “richtige“ Wahrscheinlichkeit mit zufälligem Startpunkt.

Proposition 12.8. *Ist (P^x, X_t) eine Markov-Prozeßfamilie, so ist für $x \in E$ der Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P^x)$ ein (zeitlich homogener) Markov-Prozeß bezüglich der kanonischen Filtration.*

Beweis:

Betrachte $Y : \omega \mapsto P^{X_s(\omega)}(X_t \in B)$. Wegen (ii) ist Y meßbar bezüglich $\sigma(X_s)$ und damit bezüglich \mathcal{F}_s^0 . Nach (iii) ist Y (reguläre) Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $P^x(X_{s+t} \in B | \mathcal{F}_s^0)$.

$$\begin{aligned} \text{Ferner} \quad Y &= E^x(Y | X_s) = E^x(E^x(\mathbf{1}_B(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s^0) | X_s) \\ &= E^x(\mathbf{1}_B(X_{s+t}) | X_s) = P^x(X_{s+t} \in B | X_s) \end{aligned}$$

□

Satz 12.9. *Sei E polnisch.*

(i) *Zu jeder normalen Markov-Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ existiert eine Markov-Prozeßfamilie $(X_t, P^x)_{t \geq 0, x \in E}$ auf einem (Ω, \mathcal{A}) mit $P_t(x, B) = P^x(X_t \in B)$ für alle $x \in E$ und alle $B \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$.*

(ii) *Zu jeder Markovschen Prozeßfamilie (X_t, P^x) existiert genau eine Markov-Halbgruppe (P_t) mit*

$$(*) \quad P_t(x, B) = P^x(X_t \in B) \quad \text{für alle } x \text{ und } B$$

Bemerkungen:

1. Die Prozesse $(X_t, P^x)_{t \geq 0}$ sind eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz. Man kann daher

$$\Omega = E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{A} = \mathcal{B}^{\mathbb{R}_+} \text{ und } X_t = \Pi_t$$

wählen.

2. (*) ist äquivalent zu

$$(**) \quad \int_E f(y) P_t(x, dy) = P_t f(x) = E^x(f(X_t)) = \int_{\Omega} f(X_t(\omega)) P^x(d\omega)$$

für alle $x \in E, f \in \mathcal{B}_b(E)$ bzw. $\mathcal{B}_+(E)$.

Daher sei

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_b(E) &= \text{beschränkte, } \mathcal{B}(E)\text{-meßbare, reellwertige Abbildungen auf } E \\ \mathcal{B}_+(E) &= \text{nicht-negative, } \mathcal{B}(E)\text{-meßbare Abbildungen } f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \end{aligned}$$

Beweis des Satzes 12.9:

- (i) $(P_t)_{t \geq 0, x \in E} \rightarrow$ projektive Familie \rightarrow projektiver Limes \rightarrow Eindeutigkeit bis auf Äquivalenz

- (ii) Definition (P_t) durch (*)

\Rightarrow Jedes P_t (mit $t \geq 0$) ist Markov-Kern auf (E, \mathcal{B}) :

$x \mapsto P_t(x, B) = P^x(X_t \in B)$ ist \mathcal{B} -meßbar für alle $B \in \mathcal{B}$ (weil $x \mapsto P^x(A)$ meßbar ist)

$B \mapsto P_t(x, B) = P^x(X_t \in B) = P_{X_t}^x(B)$ ist Bildmaß von P^x unter X_t bzw. Verteilung von X_t unter P^x , also W-Maß

$$\begin{aligned} P_0(x, B) &= P^x(X_0 \in B) = \mathbb{1}_B(x) \\ P_{s+t}f(x) &= E^x(f(X_{s+t})) \\ &= E^x(E^x(f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s^0)) \\ &= E^x(E^{X_s}(f(X_t))) \\ &= E^x(P_t f(X_s)) \\ &= P_s(P_t f)(x) \\ \Rightarrow P_{s+t} &= P_s \circ P_t. \end{aligned}$$

□

Wichtige Transformationen für Markov-Prozesse $(X_t)_{t \geq 0}$:

1. Homogenisierung bzw. Übergang zu einem Raum-Zeit-Prozeß $(X_t, t)_{t \geq 0}$ auf $E \times \mathbb{R}$.

2. Subordination

Sei (N_t) ein rechtsstetiger Lévy-Prozeß auf \mathbb{R}_+ zur Faltungshalbgruppe $(\eta_t)_{t>0}$; sei (X_t) ein davon unabhängiger, rechtsstetiger homogener Markov-Prozeß zu $(P_t)_t$.
 $\Rightarrow Y_t = X_{N_t}$ ist rechtsstetiger homogener Markov-Prozeß zu $(P_t^\eta)_{t \geq 0}$.

3. Doob-Transformation

Sei $u : E \rightarrow]0, \infty[$ mit $P_t u \leq u$ ($\forall t$). Dann ist die Doob-Transformation von (P_t) gegeben durch

$$P_t^u f := \frac{1}{u} P_t(u \cdot f).$$

4. Konditionierung

Sei $Z \subset E$ bzw. $z \in E$ und T eine Stoppzeit. Dann wird der konditionierte Prozeß $(\mathbb{Q}, Y_t)_{t \leq T}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(Y_t \in B) &= P(X_t \in B | X_T \in Z) \\ \text{oder} &= P(X_t \in B | X_T = z). \end{aligned}$$

5. Zeitumkehr

$$Y_t = X_{T-t}$$

6. Stoppen

$$Y_t = X_{t \wedge T}$$

7. Killen / Töten

$$Y_t = \begin{cases} X_t & t < T \\ \Delta & t \geq T \end{cases}$$

5.-7.: eventuell T auch von ω abhängig ("Stoppzeit").

Bemerkung: Für die Übergangsfamilie der standardisierten Brownschen Brücke $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) gilt:

$$P(Y_t \in A | Y_s = x) = \int_A \frac{g_{1-t}(y) g_{t-s}(x-y)}{g_{1-s}(x)} dy$$

für λ^1 -fast alle x ; alle $0 < s < t < 1$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Hierbei ist $g_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$.

Beweis: in den Übungen. □

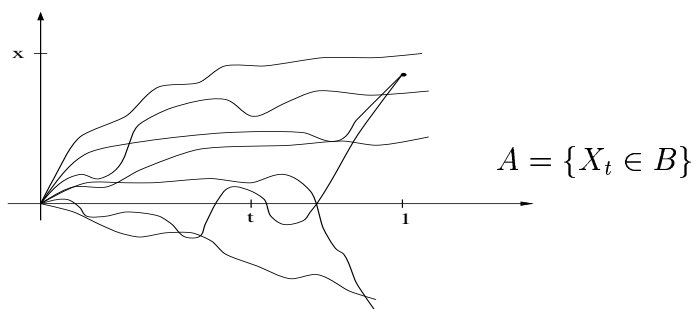
Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathcal{C}(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)))$ und X_t die t -te Projektion. Dann ist $(X_t)_{t \geq 0}$

unter dem Wiener-Maß P^0 eine standardisierte Brownsche Bewegung.
 Offenbar existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ ein W-Maß $P^{0,x}$ auf (Ω, \mathcal{A}) (bzw. auf (Ω, \mathcal{F}_1) mit $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq 1)$), so daß gilt:
 unter $P^{0,x}$ ist $(X_t)_{t \in [0,1]}$ eine Brownsche Brücke von $X_0 = 0$ nach $X_1 = x$.

Bemerkung: Für alle $A \in \mathcal{F}_1$

(i) $P^{0,x}(A) = P^0(A|X_1 = x)$ für λ^1 -fast alle x ,

(ii) $P^0(A) = \int_{\mathbb{R}} P^{0,x}(A)g_1(x)dx$



Beweis:

(i) Übung: III.4 und VII.4b,

(ii) III.4 im Spezialfall $A = \{X_t \in B\}$ mit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0 < t < 1$.
 Allgemeiner Fall: analog □

Warnung: Durch $P^0(A|X_1 = 0)$ allein kann die Brownsche Brücke nicht sauber definiert werden (auch wenn das in der Literatur öfter passiert).

Teil IV

Brownsche Bewegung

Kapitel 13

Definition und Konstruktion der Brownschen Bewegung

Definition 13.1.

a) Ein Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ auf einem W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten auf \mathbb{R}^d heißt **d -dimensionale Brownsche Bewegung**, falls gilt:

1. $(X_t)_t$ hat unabhängige Zuwächse.

2. Die Zuwächse sind verteilt durch

$$P_{X_t - X_s} = \nu_{t-s}^{(d)} \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

3. $(X_t)_t$ hat P -fast sicher stetige Pfade,
d.h. für P -fast alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$t \mapsto X_t(\omega) \text{ ist stetig.}$$

b) $(X_t)_t$ heißt **standardisierte Brownsche Bewegung**, falls zusätzlich gilt:

$$X_0 = 0 \quad P\text{-fast sicher.}$$

c) $(X_t)_t$ heißt **Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration (\mathcal{F}_t)** , falls $(\mathcal{F}_t^X) \subset (\mathcal{F}_t)$ und

(1') $X_t - X_s$ ist unabhängig von \mathcal{F}_s für alle $0 \leq s \leq t < \infty$,

(2') und (3') wie oben.

Bemerkungen:

1. $\nu_t^{(d)}$ d -dimensionales Gauß-Maß

$$\nu_t^{(d)} = \nu_t^{(1)} \otimes \dots \otimes \nu_t^{(1)},$$

wobei $\nu_t^{(1)}$ = Eindimensionale Normalverteilung mit Varianz t .

2. Jede Brownsche Bewegung ist eine Brownsche Bewegung bezüglich der kanonischen Filtration, d.h.

$$(X_t)_t \text{ zu } (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}.$$

Weitere Beispiele:

$(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, rechte Limiten, Augmentierung.

3. Aus 1. und 2. folgt, daß die Brownsche Bewegung ein Lévy-Prozeß ist, und zwar zur Faltungshalbgruppe $(\nu_t^{(d)})_{t \geq 0}$.

Lemma 13.2. Sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine ZV mit $P_Y = \nu_t^{(d)}$. Dann gilt: Für alle $\alpha > 0$ existiert ein $C = C(\alpha, d)$, so daß

$$E(|Y|^{2\alpha}) = C \cdot t^\alpha.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E(|Y|^{2\alpha}) &= \int |x|^{2\alpha} P_Y(dx) \\ &= (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2\alpha} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) dx \\ &= t^\alpha (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} z^{2\alpha} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \quad (z = \frac{x}{\sqrt{t}}) \\ &= t^\alpha \cdot C(\alpha, d). \end{aligned}$$

□

Bemerkung: $E(|Y|^2) = d \cdot t$,
 $E(|Y|^4) = d(d+2) \cdot t^2$.

Satz 13.3. Für jedes W -Maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ("Startverteilung") existiert genau ein W -Maß P^μ auf $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C})) = (\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{C}))$ derart, daß die Projektionsabbildungen $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bilden mit der Eigenschaft $P_{X_0}^\mu = \mu$.

Jede d -dimensionale Brownsche Bewegung mit Startverteilung μ ist dazu äquivalent.

P^μ heißt **Wiener-Maß** auf \mathcal{C} zur Startverteilung μ . Es gilt:

$$P^\mu(\cdot) = \int P^x(\cdot) \mu(dx) \quad \text{mit } P^x = P^{\delta_x}.$$

Beweis:

1.Schritt: Konstruktion einer projektiven Familie

Für $J = \{t_1, \dots, t_n\} \subset [0, \infty[$ wird P_J definiert durch die Gaußsche Faltungshalbgruppe $(\nu_t^{(d)})_{t \geq 0}$ und die Startverteilung μ .

2.Schritt: Bildung des projektiven Limes

$$P_I = \varprojlim P_J \quad \text{auf } (E^I, \mathcal{B}(E)^I).$$

3.Schritt: Überprüfen der Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

$$E(|X_t - X_s|^{2n}) = c_{n,d}|t - s|^n$$

\Rightarrow es existiert eine Hölder-stetige Modifikation für jeden Exponenten $\gamma < \frac{n-1}{2n}$, n beliebig, also insbesondere für $\gamma < \frac{1}{2}$.

4.Schritt: Übergang zum äußeren Maß P_I^* auf $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$

Gesuchter Prozeß ist $(\Pi_t)_{t \geq 0}$. □

Sei $\mathcal{C}_0 := \{v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) : v(0) = 0\}$.

Korollar 13.4. *Es gibt genau ein W-Maß P^0 auf $(\mathcal{C}_0, \mathcal{B}(\mathcal{C}_0))$ derart, daß die Projektionsabbildungen $\Pi_t : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, eine standardisierte Brownsche Bewegung bilden.*

P^0 heißt **Wiener-Maß** auf \mathcal{C}_0 .

Jede standardisierte Brownsche Bewegung ist zu dem Prozeß $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ auf $(\mathcal{C}_0, \mathcal{B}(\mathcal{C}_0), P^0)$ äquivalent.

Beweis: \mathcal{C}_0 ist Borelsche (sogar abgeschlossene) Teilmenge von \mathcal{C} mit $P^0(\mathcal{C}_0) = 1$. □

Korollar 13.5. *Es gibt genau ein W-Maß P auf $(\mathcal{C}_0, \mathcal{B}(\mathcal{C}_0))$ mit*

$$P(v \in \mathcal{C}_0 : v(t_1) \in B_1, \dots, v(t_n) \in B_n) = \int_{B_n} \dots \int_{B_1} g_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \dots g_{t_1}(x_1) dx_1 \dots dx_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ und alle $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Satz 13.6. *Ein Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{R}^1 ist genau dann eine standardisierte Brownsche Bewegung, im Sinne der Definition 13.1, wenn er eine standardisierte Brownsche Bewegung im Sinne der Definition 9.5 ist.*

Beweis: Seien (X_t) und (Y_t) standardisierte Brownsche Bewegungen im Sinne der Definition 13.1 bzw. 9.5. Das heißt, (Y_t) ist ein stetiger Gauß-Prozeß mit $E(Y_t) = 0$ und $E(Y_s \cdot Y_t) = s \wedge t$.

Dann ist aber auch $(X_t)_t$ ein stetiger Gauß-Prozeß.

Denn $\forall t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}_+$ mit $t_0 := 0 < t_1 < \dots < t_r$ gilt:

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_r} - X_{t_{r-1}} \text{ unabhängig, Gaußsch}$$

$\Rightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^r \tilde{\lambda}_i \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \quad \text{Gaußsch}$$

$\Rightarrow (X_t)_{t \geq 0}$ Gauß-Prozeß.

Außerdem gilt offenbar $E(X_t) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Für $s < t$ gilt ferner

$$E(X_s \cdot X_t) = E(X_s \cdot (X_t - X_s)) + E(X_s^2) = E(X_s) \cdot E(X_t - X_s) + s = s,$$

daher allgemein $E(X_s \cdot X_t) = s \wedge t$.

Also ist auch (X_t) eine Brownsche Bewegung im Sinne der Definition 9.5.

Insbesondere sind (X_t) und (Y_t) äquivalent.

Folglich hat mit (X_t) auch (Y_t) unabhängige, stationäre, ν_{t-s} -verteilte Zuwächse.

Daher ist mit (X_t) auch (Y_t) eine Brownsche Bewegung im Sinne der Definition 13.1. □

Korollar 13.7. *Mit $(X_t)_{t \geq 0}$ ist auch $(Y_t)_{t \geq 0}$, definiert durch $Y_0 = 0$ und $Y_t = tX_{1/t}$, $t > 0$ eine standardisierte Brownsche Bewegung.*

Beweis: Mit (X_t) ist auch (Y_t) Gaußsch.

Ferner: $E(Y_t) = 0$

$$E(Y_s \cdot Y_t) = st \quad E(X_{1/s} X_{1/t}) = st \left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t} \right) = t \wedge s.$$

$\Rightarrow (Y_t)$ ist eine Version einer standardisierten Brownschen Bewegung

\Rightarrow (Kolmogorov-Chentsov)

es existiert eine stetige Modifikation $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$,

d.h. es existiert $\Omega_1 \in \mathcal{A}$ mit $P(\Omega_1) = 1$, so daß für alle $\omega \in \Omega_1$:

- $\tilde{Y}_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle $t \in [0, \infty[\cap \mathbb{Q}$,

- $t \mapsto \tilde{Y}_t(\omega)$ stetig auf $[0, \infty[$,

- $t \mapsto Y_t(\omega)$ stetig auf $]0, \infty[$,

$\Rightarrow t \mapsto Y_t(\omega)$ stetig auf $[0, \infty[$ und damit:

$(Y_t)_{t \geq 0}$ ist eine standardisierte Brownsche Bewegung. □

Korollar 13.8. Für jede Brownsche Bewegung gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_t = 0 \quad P - \text{fast sicher.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \tilde{X}_t, & \tilde{X}_t &= X_t - X_0 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t \tilde{X}_{1/t} = 0 & \text{fast sicher nach Satz 13.7.} & \quad \square \end{aligned}$$

\rightarrow “Starkes Gesetz der großen Zahlen für die Brownsche Bewegung“

Proposition 13.9. Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Dann sind auch die folgenden Prozesse d -dimensionale Brownsche Bewegungen:

a) $(X_{s+t})_{t \geq 0}$ “Shift“; $s \geq 0$ fest,

b) $(X_{s+t} - X_s)_{t \geq 0}$ sogar standardisierte Brownsche Bewegung; $s \geq 0$,

c) $(X_t + x)_{t \geq 0}$ “Translation“; $x \in \mathbb{R}^d$,

d) $(-X_t)_{t \geq 0}$
allgemeiner: $(F(X_t))_{t \geq 0}$ für jedes $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, orthonormale Transformation,

e) $(c \cdot X_{\frac{t}{c^2}})_{t \geq 0}$ “Skalierung“ für alle $c > 0$,

f) $(Y_t = t \cdot X_{1/t})_{t > 0}$ mit $Y_0 = 0$ “Inversion“;
sogar standardisierte Brownsche Bewegung.

Ist dabei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, so ist in d) und e) der transformierte Prozeß wieder eine solche.

Der transformierte Prozeß in c) ist eine “in x startende Brownsche Bewegung“.

Beweis:

a)-c) Klar, denn transformierte Prozesse haben dieselben Stetigkeitseigenschaften wie $(X_t)_{t \geq 0}$ und dieselben Zuwächse.

d),e) Stetigkeit klar,

Unabhängigkeit der Zuwächse auch, zur Verteilung der Zuwächse,

$$\begin{aligned}
\text{d) } P(F(X_t) - F(X_s) \in B) &= P(X_t - X_s \in F^{-1}(B)) \\
&= \nu_{t-s}(F^{-1}(B)) \\
&= (2\pi u)^{-\frac{d}{2}} \int_{F^{-1}(B)} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2u}\right) dx, \text{ wobei } u := t - s \\
&= (2\pi u)^{-\frac{d}{2}} \int_B \exp\left(-\frac{|x|^2}{2u}\right) dx \\
&= \nu_{t-s}(B), \\
\text{e) } P(c \cdot X_{\frac{t}{c^2}} - c \cdot X_{\frac{s}{c^2}} \in B) &= P(X_{\frac{t}{c^2}} - X_{\frac{s}{c^2}} \in \frac{1}{c} \cdot B) \\
&= \nu_{\frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}}\left(\frac{1}{c}B\right) \\
&= \left(2\pi \frac{t-s}{c^2}\right)^{-\frac{d}{2}} \int_{\frac{1}{c}B} \exp\left(-\frac{x^2}{2\frac{t-s}{c^2}}\right) dx \\
&= \nu_{t-s}(B).
\end{aligned}$$

f) siehe Kapitel Gauß-Prozesse. □

Folgerung 13.10. *Aus dem Wiener-Maß P^0 auf \mathcal{C}_0 erhält man alle Wiener-Maße P^μ auf \mathcal{C} , μ W -Maß auf \mathbb{R}^d .*

Nämlich:

1. *Für $x \in \mathbb{R}^d$ ist wegen c) der Prozeß $(\Pi_t + x)_{t \geq 0}$ auf $(\mathcal{C}_0, \mathcal{B}(\mathcal{C}_0), P^0)$ eine in x startende Brownsche Bewegung.*

$$\Rightarrow \quad P^x = \varphi_x(P^0) \text{ mit} \\
\varphi_x : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, v \mapsto v + x.$$

2. *Für jedes W -Maß μ ist*

$$P^\mu = \int P^x \mu(dx).$$

Proposition 13.11. *Sei $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ ein \mathbb{R}^d -wertiger Prozeß auf einem W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P) . Dann sind äquivalent:*

(a) *$(X_t)_{t \geq 0}$ ist d -dimensionale Brownsche Bewegung.*

(b) *Die Prozesse $(X_t^i)_{t \geq 0}$, $i = 1, \dots, d$, sind voneinander unabhängig, und jeder für sich ist eine eindimensionale Brownsche Bewegung.*

Bemerkungen:

1. Stets gilt: $(X_t)_{t \geq 0}$ d -dimensionale Brownsche Bewegung $\Rightarrow (X_t^i)_{t \geq 0}$ ist eine eindimensionale Brownsche Bewegung.
Für die Umkehrung ist die Unabhängigkeit entscheidend! Z.B. ist (X_t^1, X_t^1) keine zweidimensionale Brownsche Bewegung.
2. Unabhängigkeit der Prozesse $(X_t^i)_{t \geq 0}$ für $i = 1, \dots, d$ heißt: die ZV $X^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$, $i = 1, \dots, d$ sind unabhängig.
M.a.W.: Die d σ -Algebren $\sigma(X_t^i : t \in \mathbb{R}_+)$, $i = 1, \dots, d$, sind unabhängig.
Hieraus folgt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$:
die d ZV $X_t^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, d$ sind unabhängig.
Die Umkehrung gilt nicht!
Z.B.: (X_t) sei die eindimensionale Brownsche Bewegung. Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ sind dann die ZV X_t und $X_{t+1} - X_t$ unabhängig, aber Prozesse $(X_t)_{t \geq 0}$ und $(X_{t+1} - X_t)_{t \geq 0}$ sind abhängig, denn

$$\sigma(X_{t+1} - X_t : t \geq 0) \subset \sigma(X_t : t \geq 0).$$

Beweis:

(a) \Rightarrow (b): Sei $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^d = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) = (\mathcal{C}^1)^d$.

Die Prozesse $(X_t^i)_{t \geq 0}$ für $i = 1, \dots, d$ sind genau dann unabhängig, wenn gilt:

$$P(X^1 \in A^1, \dots, X^d \in A^d) = \prod_{i=1}^d P(X^i \in A^i)$$

für alle $A^i \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^1)$ $i = 1, \dots, d$.

Es genügt, diese Identität für alle A^i auf einem stabilen Durchschnitts-Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathcal{C}^1)$ zu verifizieren, etwa für

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\Pi_J^{-1}(B) \subset \mathcal{C}^1 : J = (t_1, \dots, t_n) \subset \mathbb{R}_+, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

(hier ist $\Pi_J : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die Koordinaten (t_1, \dots, t_n)).

Nun gilt für $A^i = \Pi_J^{-1}(B^i)$ mit $B^i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
P(X^i \in A^i, i = 1, \dots, d) &= P((X_{t_1}^i, \dots, X_{t_n}^i) \in B^i, i = 1, \dots, d) \\
&= P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) \\
&\quad \text{mit } B = B^1 \times \dots \times B^d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d \cdot n}) \\
&= \int \dots \int_B g_{t_n - t_{n-1}}^{(d)}(x_n - x_{n-1}) \cdot \dots \cdot g_{t_1}^{(d)}(x_1) dx_1 \dots dx_n \\
&\quad \text{mit } x_i \in \mathbb{R}^d \\
&= \prod_{i=1}^d \int \dots \int_{B^i} g_{t_n - t_{n-1}}^{(1)}(x_n^i - x_{n-1}^i) \cdot \dots \cdot g_{t_1}^{(1)}(x_1^i) dx_1^i \dots dx_n^i \\
&\quad \text{mit } x_i \in \mathbb{R}^1 \\
&= \prod_{i=1}^d P(X^i \in A^i)
\end{aligned}$$

→ Unabhängigkeit.

Die Unabhängigkeit der Zuwächse überträgt sich von $(X_t)_{t \geq 0}$ auf $(X_t^i)_{t \geq 0}$.

Ferner gilt:

Für alle $A^i \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^1)$, $i = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^d P(X_t^i - X_s^i \in A^i) &= P(X_t^i - X_s^i \in A^i, i = 1, \dots, d) \\
&= P(X_t - X_s \in \prod_{i=1}^d A^i) = \nu_{t-s}^{(d)} \left(\prod_{i=1}^d A^i \right) \\
&= \prod_{i=1}^d \nu_{t-s}^{(1)}(A^i),
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(X_t^i - X_s^i \in A^i) = \nu_{t-s}^{(1)}(A^i) \quad \text{für jedes } i,$$

$$\Rightarrow (X_t^i)_{t \geq 0} \text{ ist eindimensionale Brownsche Bewegung.}$$

(b) ⇒ (a): Übungen, Serie 6, Aufgabe 1. □

Korollar 13.12. Sei $P^{(d)}$ das Wiener-Maß auf

$$\mathcal{C}_0^{(d)} = \{v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) : v(0) = 0\}$$

und $P^{(1)}$ das Wiener-Maß auf $\mathcal{C}_0^{(1)}$.

Dann gilt auf $\mathcal{C}_0^d = \mathcal{C}_0^1 \times \dots \times \mathcal{C}_0^1$:

$$P^{(d)} = P^{(1)} \otimes \dots \otimes P^{(1)}.$$

Proposition 13.13. Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung. Dann gilt:

(a) $E(X_t) = 0$ für alle $t \geq 0$.

(b) $E(\langle X_s, X_t \rangle) = d(s \wedge t)$ für alle $s, t \geq 0$ mit $\langle X_s, X_t \rangle = \sum_{i=1}^d X_s^i \cdot X_t^i$.

Insbesondere gilt $E(|X_t|^2) = d \cdot t$ für alle $t \geq 0$.

(c) $E(|X_t - X_s|^{2\alpha}) = c|t - s|^\alpha$ für $s, t \geq 0$ mit $c = c(\alpha, d)$.

Beweis:

(a) $E(X_t) = \int_{\mathbb{R}^d} x \nu_t^{(d)} = 0 \in \mathbb{R}^d$

(b)

$$\begin{aligned} E(\langle X_s, X_t \rangle) &= \sum_{i=1}^d E(X_s^i \cdot X_t^i) \\ &\stackrel{s \leq t}{=} \sum_{i=1}^d E(X_s^i \cdot X_s^i) + \sum_{i=1}^d \underbrace{E(X_s^i (X_t^i - X_s^i))}_{=0} \\ &= d \cdot E((X_s^1)^2) \\ &= d \cdot s, \end{aligned}$$

(c) Lemma. □

Kapitel 14

Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung

Satz 14.1. Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung. Dann sind fast alle Pfade Hölder-stetig für jeden Exponenten $\gamma < \frac{1}{2}$ und nirgends Hölder-stetig für jedes $\gamma > \frac{1}{2}$.

D.h. es existiert $\Omega^* \in \mathcal{A}$ mit $P(\Omega^*) = 1$, und für alle $\omega \in \Omega^*$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$(1) \quad \limsup_{s \rightarrow t} \frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{|t - s|^\gamma} < \infty \quad \text{für alle } \gamma < \frac{1}{2},$$

$$(2) \quad \limsup_{s \rightarrow t} \frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{|t - s|^\gamma} = \infty \quad \text{für alle } \gamma > \frac{1}{2}.$$

Teil (1): Kolmogorov-Chentsov,

Teil (2): Dvoretzky, Erdős, Kakutani.

Beweis:

(1)a) Jede Brownsche Bewegung $(X_t)_{t \geq 0}$ erfüllt die Bedingung (*) aus Kolmogorov-Chentsov mit $\alpha = 2n$ und $\beta = n - 1$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine stetige Modifikation $(X_t^n)_t$ von (X_t) , die Hölder-stetig ist mit Exponenten $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}$.

Da $(X_t)_t$ bereits stetig ist, folgt die Ununterscheidbarkeit von (X_t) und (X_t^n) , d.h. es existiert ein $\Omega_n \in \mathcal{A}$ mit $P(\Omega_n) = 1$ und $X_t(\omega) = X_t^n(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega_n$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$. Damit ist $(X_t)_t$ für $\omega \in \Omega_n$ Hölder-stetig.

b) Sei $\Omega_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \Rightarrow P(\Omega_\infty) = 1$.

Für alle $\omega \in \Omega_\infty$ ist $t \mapsto X_t(\omega)$ Hölder-stetig für alle Exponenten $\gamma_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, also für alle $\gamma < \frac{1}{2}$, da Hölder-Stetigkeit mit γ impliziert: Hölder-Stetigkeit für alle $\gamma' < \gamma$.

(2)• Analog genügt es zu zeigen:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Ω'_n mit Maß 1, so daß $t \mapsto X_t(\omega)$ nirgendwo Hölder-stetig für $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, und zwar für alle $\omega \in \Omega'_n$.

Denn dann ist $\Omega'_\infty := \bigcap_{n \geq 1} \Omega'_n$; $t \mapsto X_t(\omega)$ nirgendwo Hölder-stetig für alle

$\gamma > \frac{1}{2}$.

Mit $\Omega^* = \Omega_\infty \cap \Omega'_\infty$ folgt die Behauptung.

• Also sei $\gamma > \frac{1}{2}$ fix!

o.B.d.A. $d = 1$ (denn (X_t) Hölder $\Rightarrow (X_t^i)$ Hölder),

o.B.d.A. $t \in I = [0, 1[$

(denn $(X_t)_{t \in [0, \infty[}$ irgendwo Hölder $\Rightarrow (X_{t+n} - X_n)_{t \in [0, 1[}$ irgendwo Hölder für mindestens ein n).

• Für $j, k \in \mathbb{N}$ sei

$$M_{jk} = \bigcup_{t \in [0, 1[} \bigcap_{h \in [0, \frac{1}{k}[} \{\omega \in \Omega : |X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)| \leq j \cdot h^\gamma\}.$$

Problem: Diese Menge muß nicht notwendig meßbar sein.

Ziel: Konstruiere $N_0 \in \mathcal{A}$ mit $P(N) = 0$ und mit

$$\bigcup_{j, k} M_{jk} \subset N.$$

\Rightarrow Für alle $\omega \in \Omega \setminus N$: $t \mapsto X_t(\omega)$ ist nirgendwo auf $[0, 1[$ (rechtsseitig) Hölder-stetig mit Exponent γ .

• j, k seien fest.

Sei $N > \frac{1}{\gamma - \frac{1}{2}}$, $n \geq k(N + 1)$ und $\omega \in M_{jk}$

\Rightarrow es existiert $t \in [0, 1[$, so daß für alle $h \in [0, \frac{1}{k}[$:

$$|X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)| \leq j \cdot h^\gamma.$$

Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $\frac{i-1}{n} \leq t < \frac{i}{n}$.
 \Rightarrow Für alle $\gamma = 0, 1, \dots, N$

$$\frac{i+\gamma}{n} - t = \frac{i-1}{n} - t + \frac{\gamma+1}{n} \leq \frac{\gamma+1}{n} \leq \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |X_{\frac{i+1}{n}}(\omega) - X_{\frac{i}{n}}(\omega)| &\leq |X_{\frac{i+1}{n}}(\omega) - X_t(\omega)| + |X_t(\omega) - X_{\frac{i}{n}}(\omega)| \\ &\leq j \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^\gamma + j \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^\gamma. \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} |X_{\frac{i+2}{n}}(\omega) - X_{\frac{i+1}{n}}(\omega)| &\leq j \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^\gamma + j \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^\gamma \\ &\quad \dots \quad \dots \\ |X_{\frac{i+\nu}{n}}(\omega) - X_{\frac{i+\nu-1}{n}}(\omega)| &\leq j \cdot \left(\frac{\nu+1}{n}\right)^\gamma + j \cdot \left(\frac{\nu}{n}\right)^\gamma \\ &< 2j \left(\frac{N+1}{n}\right)^\gamma \quad \text{für alle } \nu = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

$$\text{D.h. } \omega \in A_i^{(n)} := \underbrace{\bigcap_{\nu=1}^N \left\{ |X_{\frac{i+\nu}{n}}(\omega) - X_{\frac{i+\nu-1}{n}}(\omega)| < 2j \left(\frac{N+1}{n}\right)^\gamma \right\}}_{\in \mathcal{A}}$$

$$\Rightarrow M_{jk} \subset \bigcup_{i=1}^n A_i^{(n)} \in \mathcal{A}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse $(X_{\frac{i+\nu}{n}} - X_{\frac{i+\nu-1}{n}})$ $i = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned}
P(A_i^{(n)}) &= \prod_{\nu=1}^N P(\{|X_{\frac{i+\nu}{n}} - X_{\frac{i+\nu-1}{n}}| < 2j \left(\frac{N+1}{n}\right)^\gamma \}) \\
&= \prod_{\nu=1}^N (2\pi \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \int_{-2j(\frac{N+1}{n})^\gamma}^{2j(\frac{N+1}{n})^\gamma} e^{-\frac{x^2}{2/n}} dx \\
&\leq \left[\sqrt{\frac{n}{2\pi}} 2 \cdot 2j \left(\frac{N+1}{n}\right)^\gamma \right]^N \\
&= j^N n^{-N(\gamma-\frac{1}{2})} \cdot C_N, \\
\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^{(n)}\right) &\leq \sum_{i=1}^n P(A_i^{(n)}) \\
&\leq C_N \cdot j^N \cdot n^{1-N(\gamma-\frac{1}{2})}, \\
\Rightarrow P\left(\bigcap_{n \geq k(N+1)} \bigcup_{i=1}^n A_i^{(n)}\right) &\leq C_N \cdot j^N \cdot n^{(1-N(\gamma-\frac{1}{2}))} \rightarrow 0, \\
&\text{für } n' \rightarrow \infty, \text{ da } n' \geq k(N+1).
\end{aligned}$$

$$N := \bigcap_{n=k(N+1)} \bigcup_{i=1}^n A_i^{(n)} \in \mathcal{A} \Rightarrow P(N) = 0.$$

Außerdem: $M_{jk} \subset \bigcup_{i=1}^n A_i^{(n)}$ für alle n .

$$\begin{aligned}
M_{jk} &\subset \bigcup_{n \geq k(N+1)} \bigcup_{i=1}^n A_i^{(n)} = N_{jk}, \\
N &:= \bigcup_{j,k} N_{jk} \Rightarrow \begin{array}{l} P(N) = 0, \\ \bigcup M_{jk} \subset N. \end{array} \quad \square
\end{aligned}$$

Korollar 14.2. Sei (X_t) d -dimensionale Brownsche Bewegung. Dann existiert $\Omega^* \in \mathcal{A}$, $P(\Omega^*) = 1$, so daß für alle $\omega \in \Omega^*$

a) $t \mapsto X_t(\omega)$ ist nirgends differenzierbar auf $[0, \infty[$.
(Paley, Wiener, Zygmund)

b) $t \mapsto X_t(\omega)$ ist von unbeschränkter Variation auf jedem Intervall $]T_0, T_1[$.

c) $t \mapsto X_t^i(\omega)$ ist auf keinem Intervall $]T_0, T_1[$ monoton, $i = 1, \dots, d$.

d) Die Menge der lokalen Maxima von $t \mapsto X_t^i(\omega)$ ist abzählbar und dicht in $[0, \infty[$; jedes lokale Maximum ist strikt.

Beweis:

a) \Rightarrow c): Monotonie auf $]T_0, T_1[$,

\Rightarrow beschränkte Variation dort,

\Rightarrow Differenzierbarkeit für λ^1 -fast alle t in $]T_0, T_1[$,

\Rightarrow Differenzierbarkeit in mindestens einem Punkt,

\Rightarrow Hölder-Stetigkeit mit Exponent 1 für ein $t \in]T_0, T_1[$.

d) • stetig und monoton auf keinem Intervall, dann liegen lokale Maxima dicht,

• stetig, dann sind die strikten lokalen Maxima abzählbar,

• alle lokalen Maxima sind strikt.

\rightarrow Revuz/Yor; Karatzas/Shreve

□

Satz 14.3 (Khinchine).

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eindimensionale standardisierte Brownsche Bewegung

1. "Satz vom iterierten Logarithmus für $t \rightarrow \infty$ "

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{fast sicher} \quad (14.1)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1 \quad \text{fast sicher} \quad (14.2)$$

2. "Satz vom iterierten Logarithmus für $t \rightarrow 0$ "

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log |\log t|}} = 1 \quad \text{fast sicher} \quad (14.3)$$

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log |\log t|}} = -1 \quad \text{fast sicher} \quad (14.4)$$

Beweisidee:

(i) (14.1) \Leftrightarrow (14.2) (14.3) \Leftrightarrow (14.4)

(denn $(-X_t)_{t \geq 0}$ ist standardisierte Brownsche Bewegung).

(ii) (14.1) \Leftrightarrow (14.3),

denn: $(t \cdot X_{1/t})_{t \geq 0}$ ist standardisierte Brownsche Bewegung

$$\begin{aligned}
 (14.1) \quad \Rightarrow \quad +1 &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t \cdot X_{1/t}}{\sqrt{2t \log \log t}} && \text{fast sicher} \\
 &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_{1/t}}{\sqrt{2 \frac{1}{t} \log |\log \frac{1}{t}|}} \\
 &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log |\log t|}} && \Rightarrow (14.3).
 \end{aligned}$$

(14.1) beweist man wie den Satz vom iterierten Logarithmus für Summen von unabhängig identisch verteilten ZV von Hartman-Winter. \square

Korollar 14.4. *An jeder Stelle sind fast alle Pfade einer d -dimensionalen Brownschen Bewegung nicht Hölder-stetig für Exponenten $\gamma = \frac{1}{2}$, d.h. für alle $t \in [0, \infty[$ existiert $\Omega_t \in \mathcal{A}$, $P(\Omega_t) = 1$, so daß*

$$\limsup_{s \rightarrow t} \frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} = \infty \quad \text{für alle } \omega \in \Omega_t.$$

Beweis: o.B.d.A. $d = 1$ und t fix. Dann ist $(X_{s+t} - X_t)_{s \geq 0}$ eine standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung,

$$\begin{aligned}
 \limsup_{s \searrow 0} \frac{|X_{s+t}(\omega) - X_t(\omega)|}{\sqrt{s}} &= \limsup_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{|X_{s+t}(\omega) - X_t(\omega)|}{\sqrt{2s \log |\log s|}}}_1 \cdot \underbrace{\sqrt{2 \log |\log s|}}_{\rightarrow \infty} \\
 &= 1 \cdot \infty = \infty. && \square
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

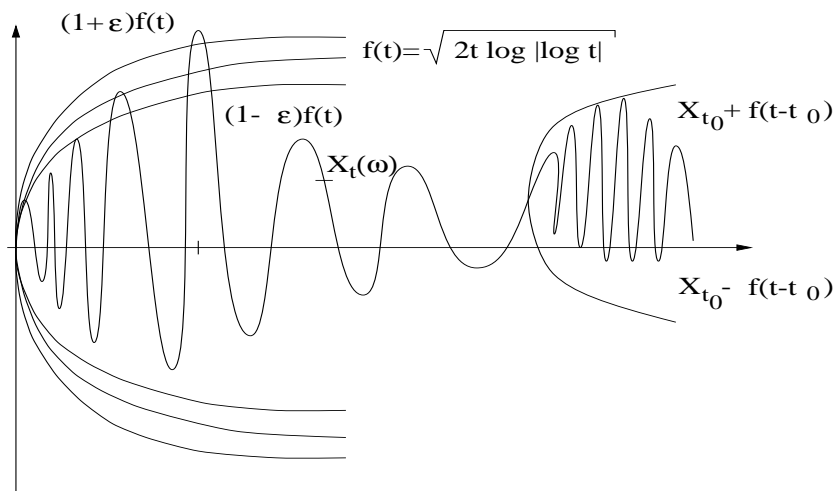
1. Fast alle Pfade einer d -dimensionalen Brownschen Bewegung sind irgendwo Hölder-stetig mit Exponent $\gamma = \frac{1}{2}$.
2. Anschaulich besagt der Satz vom iterierten Logarithmus für $t \rightarrow 0$: Für fast alle $\omega \in \Omega$ und alle $\epsilon > 0$:
 1. Es existiert $T = T(\epsilon, \omega) > 0$, so daß für alle $t \in [0, T]$:

$$-(1 + \epsilon)f(t) \leq X_t(\omega) \leq (1 + \epsilon)f(t),$$

wobei $f(t) = \sqrt{2t \log |\log t|}$.

2. Es existieren $s_n = s_n(\epsilon, \omega)$, $t_n = t_n(\epsilon, \omega)$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, $t_n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} X_{t_n}(\omega) &> (1 - \epsilon)f(t_n) \\ X_{s_n}(\omega) &< -(1 - \epsilon)f(s_n) \end{aligned}$$



Beachte: $t^{\frac{1}{2}} \ll t^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log |\log t|} \ll t^{\frac{1}{2} + \epsilon}$ für $t \rightarrow 0$, aber man darf gerne an $t^{\frac{1}{2}}$ denken bei $f(t)$.

Satz 14.5. Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ standardisierte Brownsche Bewegung und sei $Z(\omega) = \{t \in [0, \infty[: X_t(\omega) = 0\}$ die Nullstellenmenge der Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$. Dann gelten für fast alle $\omega \in \Omega$:

(i) $Z(\omega)$ hat Lebesguemaß 0.

(ii) $Z(\omega)$ ist abgeschlossen.

(iii) $Z(\omega)$ ist unbeschränkt und enthält $t = 0$ als Häufungspunkt.

(iv) Alle Punkte von $Z(\omega)$ sind Häufungspunkte, d.h. für alle $t \in Z(\omega)$: $\overline{Z(\omega) \setminus \{t\}} = Z(\omega)$.

(v) $[Z(\omega)]^c = \bigcup_{n \geq 1} I_n(\omega)$ mit Intervallen $I_n(\omega)$, die offen und disjunkt sind.
 (“Menge ist perfekt“)

Beweis: (vi) und (v) ohne Beweis (Starke Markov-Eigenschaft).

Sei o.B.d.A. $(X_t)_{t \geq 0}$ die kanonische Realisierung, d.h. $\Omega = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ und $X_t = \Pi_t =$ Projektion.

(i) Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}_+ \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega) = \omega(t) \end{aligned}$$

stetig und damit insbesondere meßbar, d.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-meßbar.}$$

Daher gilt für die meßbare Menge

$$Z = \{(t, \omega) : X_t(\omega) = 0\},$$

wegen Fubini:

$$\begin{aligned} (\lambda^1 \otimes P)(Z) &= \int_{\mathbb{R}_+} P(Z_t) \lambda^1(dt) \quad \text{wobei } Z_t = \{\omega : (t, \omega) \in Z\} \\ \int_{\Omega} \lambda^1(Z(\omega)) P(d\omega) &= (\lambda^1 \otimes P)(Z). \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } \int_{\mathbb{R}_+} P(X_t = 0) dt = 0,$$

$$\text{da } P(X_t = 0) = 0 \text{ für alle } t$$

$$\Rightarrow \lambda^1(Z(\omega)) = 0 \text{ für } P\text{-fast alle } \omega.$$

(ii) $t \mapsto X_t(\omega)$ ist stetig, und $Z(\omega)$ ist Urbild von $\{0\}$.

(iii) folgt aus dem Satz vom iteriertem Logarithmus für $t = 0$ bzw. $t \rightarrow \infty$.

Bemerkung: Für $d \geq 2$ gilt $Z(\omega) = \{0\}$ fast sicher.

Kapitel 15

Das Invarianzprinzip

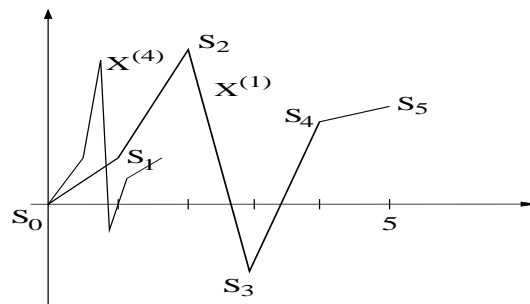
a) Die Ausgangssituation

(Ω, \mathcal{A}, P) beliebiger W-Raum,

$(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge unabhängig identisch verteilter ZV (reellwertiger) auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 > 0$.

$$S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i \quad \text{Partialsommen,}$$

$(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Irrfahrt (random walk).



Lineare Interpolation

$$S_t = S_{[t]} + (t - [t]) \cdot \xi_{[t]+1}$$

$\Rightarrow (S_t)_{t \geq 0}$ ist ein stochastischer Prozeß (definiert auf (Ω, \mathcal{A}, P)) mit (sicher) stetigen Pfaden.

Durch Skalierung von Raum und Zeit erhält man eine Folge von Prozessen $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ mit

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \cdot S_{nt}$$

(auf (Ω, \mathcal{A}, P)) mit stetigen Pfaden und Werten in \mathbb{R} .

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ verhält sich der Prozeß $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ annähernd wie eine ein-dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung:

Für $s = \frac{k}{n}$, $t = \frac{k+l}{n}$ ist der Zuwachs

$$X_t^{(n)} - X_s^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\xi_{k+1} + \dots + \xi_{k+l})$$

unabhängig von $X_r^{(n)}$ mit $r \leq s$ (und insbesondere von deren Zuwächsen) und hat den Erwartungswert 0 sowie die Varianz $t - s$.

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ sei $P^{(n)} = P_{X^{(n)}}$ die Verteilung von $X^{(n)}$ auf $\mathcal{C}_0 = \{v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : v(0) = 0\}$, d.h.

$$P^{(n)}(A) = P(\{\omega \in \Omega | X^{(n)}(\omega) \in A\})$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$.

b) Der Satz

Satz 15.1 (Invarianzprinzip von Donsker).

Die Folge $P^{(n)}$ konvergiert schwach für $n \rightarrow \infty$ gegen das Wiener-Maß P_0 auf \mathcal{C}_0 .
D.h.: Für alle $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0, \mathbb{R})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_0} f(v) P^{(n)} dv = \int_{\mathcal{C}_0} f(v) P_0(dv).$$

Z.B.: $f = \Pi_t : v \mapsto v(t)$,
 $f = \max_t : v \mapsto \max_{s \leq t} v(s)$.

Satz 15.2. Sei $(\mu_n)_n$ eine Folge von W -Maßen auf \mathcal{C}_0 . Dann sind äquivalent:

- (i) (μ_n) ist schwach konvergent auf \mathcal{C}_0 .
- (ii) $\{\mu_n\}$ ist bzgl. der schwachen Topologie relativ kompakt auf \mathcal{C}_0 , und für jedes endliche $J = \{t_1, \dots, t_k\}$ gilt: $(\Pi_J(\mu_n))_n$ ist schwach konvergent auf $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^J$.

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): Für alle $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^k)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \dots, x_k) \Pi_{(t_1, \dots, t_k)}(\mu_n)(dx_1 \dots dx_k) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_0} \underbrace{f(\Pi_{(t_1, \dots, t_k)}(v))}_{f \circ \Pi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0)} \mu_n(dv) \\ = \int_{\mathcal{C}_0} f(\Pi_{(t_1, \dots, t_k)}(v)) \mu(dv) \\ = \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \dots, x_k) \Pi_{(t_1, \dots, t_k)}(\mu)(dx_1, \dots, dx_k) \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i): $\{\mu_n\}$ ist schwach relativ-kompakt.

\Rightarrow Für jede Teilfolge $\{\mu'_n\}_n$ von $\{\mu_n\}_n$ existiert eine weitere Teilfolge $\{\mu''_n\}_n$, die schwach konvergiert gegen ein W-Maß μ'' auf \mathcal{C}_0 .

Annahme: es existiert eine Teilfolge $\{\mu_n^*\}_n$ von $\{\mu_n\}$, die schwach gegen ein W-Maß μ^* konvergiert.

\Rightarrow Für alle endlichen J :

$$\begin{aligned} \Pi_J(\mu'') &= \lim \Pi_J(\mu''_n) = \lim \Pi_J(\mu_n) \\ &= \lim \Pi_J(\mu_n^*) = \Pi_J(\mu^*). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu'' = \mu^*$. D.h. der schwache Limes ist eindeutig.

Sei $\mu = \mu^* = \mu''$.

Zu zeigen ist noch:

$(\mu_n)_n$ (und nicht nur $(\mu''_n)_n$) konvergiert gegen μ .

Annahme: die Folge konvergiert nicht!

Sei $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}_0)$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_0} f(v) \mu_n(dv) \quad \text{existiert nicht} \quad \text{oder} \\ \text{ist} \neq \int f(v) \mu(dv). \end{aligned}$$

\Rightarrow Eine Teilfolge $(\mu'_n)_n$ existiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(v) \mu'_n(dv) \text{ existiert und ist } \neq \int f(v) \mu(dv).$$

\Rightarrow Es existiert keine Teilfolge $(\mu''_n)_n$ von $(\mu'_n)_n$ mit

$$\lim \int f(v) \mu''_n(dv) = \int f(v) \mu(dv).$$

Widerspruch zum Beginn des Beweises. □

Folgerung 15.3. Aus dem Invarianz-Prinzip folgt der Zentrale Grenzwertsatz.

Denn: Invarianz-Prinzip $\Rightarrow P_{X_t^{(n)}} = \Pi_t(P^{(n)}) \rightarrow \Pi_t(P_0)$.

Insbesondere für $t = 1$:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n\right) \longrightarrow \nu_1.$$

Wichtige Bemerkung: Aus der schwachen Konvergenz der $(\Pi_J(\mu_n))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle endlichen J folgt im allgemeinen nicht die schwache Konvergenz der $(\mu_n)_n$.

Beispiel 15.4.

$$X_t^{(n)} = nt \mathbf{I}_{[0, \frac{1}{2n}[}(t) + (1 - nt) \mathbf{I}_{[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}[}(t)$$

unabhängig von ω (nicht-stochastisch!),

$$P^{(n)}(A) = P(X^{(n)} \in A) = \mathbf{I}_A(X^{(n)})$$

für $A \in \mathcal{C}_0$. Für $B \subset \mathbb{R}$ ist

$$P_t^{(n)}(B) = P(X_t^{(n)} \in B) = \mathbf{I}_B(X_t^{(n)}) \rightarrow \mathbf{I}_B(0) = \delta_0(B), \quad n \rightarrow \infty.$$

Also: $P_t^{(n)} \longrightarrow \delta_0$ (mit $0 \in \mathbb{R}$).

Aber: $P^{(n)} \not\rightarrow \delta_0$ (mit $0 \in \mathcal{C}_0$).

Denn: $f(v) = \sup_{0 \leq t \leq 1} v(t)$ definiert eine stetige Funktion auf \mathcal{C}_0 :

$$E^{(n)}(f) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0.$$

c) Konvergenz der endlich-dimensionalen Verteilungen

Proposition 15.5. Seien $(\xi_i), (S_n), (X_t^{(n)})$ wie eben, $P^{(n)}$.

Dann gilt für alle $J \subset [0, \infty[$

$$\Pi_J(P^{(n)}) \longrightarrow \Pi_J(P_0)$$

mit $P_0 =$ Wiener-Maß.

Beweis: Betrachte zunächst den Fall $J = \{t\}$.

Zu zeigen: $P_t^{(n)} \longrightarrow \nu_t$ für $n \rightarrow \infty$.

Das ist im wesentlichen die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes. Nämlich:

1. $|X_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}|\xi_{[nt+1]}| \longrightarrow 0$ P -stochastisch, für $n \rightarrow \infty$,
wegen der Chebyshev-Ungleichung
2. $\frac{[nt]}{n} \rightarrow t$ für t fix, $n \rightarrow \infty \Rightarrow P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}\right) \longrightarrow \nu_t$, wegen des ZGS.

1. und 2. $\Rightarrow P_{(X_t^{(n)})} \longrightarrow \nu_t$ für $n \rightarrow \infty$.

Nächster Fall: $J = \{s, t\}$ mit $s < t$.

Zu zeigen: $(X_s^{(n)}, X_t^{(n)})(P) \longrightarrow (\Pi_s, \Pi_t)(P_0)$.

Aus der Chebyschev-Ungleichung folgt für alle $\epsilon > 0$:

$$P \left(\left| (X_s^{(n)}, X_t^{(n)}) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[sn]}, S_{[tn]}) \right| > \epsilon \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bleibt zu zeigen: $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[sn]}, S_{[tn]})(P) \rightarrow (\Pi_s, \Pi_t)(P_0)$. (*)

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 && \text{stetig, mit stetiger Umkehrung.} \\ (s, t) &\mapsto (s, t - s) \end{aligned}$$

Also ist (*) äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[sn]}, S_{[tn]} - S_{[sn]})(P)}_{=} \longrightarrow (\Pi_s, \Pi_t - \Pi_s)(P_0) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[sn]} \xi_i \right) (P) \otimes \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[tn]} \xi_i \right) (P) \\ &(\Pi_s, \Pi_t - \Pi_s)(P) = \Pi_s(P_0) \otimes \Pi_{t-s}(P_0) = \nu_s \otimes \nu_{t-s}. \end{aligned}$$

Für jeden der beiden Faktoren gilt wie im ersten Fall schwache Konvergenz.

Daher konvergiert auch das Produkt.

Allgemeines J : analog. □

d) Relativ-Kompaktheit

Satz 15.6 (Prohorov).

Eine Menge $\{\mu_i\}_I$ von W -Maßen auf einem polnischen Raum E ist relativ-kompakt (bezüglich der schwachen Topologie) genau dann, wenn sie straff ist, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert $K \subset E$, K kompakt, so daß für alle $i \in I$ $\mu_i(K) \geq 1 - \epsilon$ ist.

Satz 15.7 (Arzela-Ascoli).

Eine Menge $A \subset \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ist relativ-kompakt genau dann, wenn für alle $T > 0$ gilt:

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \sup_{\omega \in A} m_T(\omega, \delta) = 0,$$

wobei
$$m_T(\omega, \delta) = \max_{\substack{|s-t| < \delta \\ 0 \leq s, t < T}} |\omega(s) - \omega(t)|.$$

Ohne Beweis: z.B. Karatzas/Shreve, pp. 62/63) □

Satz 15.8. Eine Folge $\{\mu_n\}_n$ von W -Maßen auf \mathcal{C}_0 ist genau dann straff, wenn

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} \mu_n(\omega : m_T(\omega, \delta) > \epsilon) = 0 \quad (15.1)$$

für alle $T > 0$ und alle $\epsilon > 0$.

Beweis: nur von “ \Leftarrow “

Sei $T > 0, \eta > 0$, wähle für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\delta_k > 0$ mit

$$\sup_{n \geq 1} \mu_n(\omega : m_T(\omega, \delta_k) > \frac{1}{k}) \leq \eta \cdot 2^{-(T+k+1)}.$$

Definiere

$$A_T = \{\omega \in \mathcal{C}_0 : m_T(\omega, \delta_k) \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$

und $A = \bigcap_{\substack{T \geq 1 \\ T \in \mathbb{N}}} A_T.$

A_T und damit auch A ist abgeschlossen

$$\Rightarrow \mu_n(A_T) \geq 1 - \sum_{k \geq 0} \eta \cdot 2^{-(T+k+1)} = 1 - \eta \cdot 2^{-T}$$

$$\Rightarrow \mu_n(A) \geq 1 - \eta, \quad \text{und zwar für alle } n$$

\Rightarrow (Arzela-Ascoli) A ist kompakt

\Rightarrow Straffheit □

e) Nachweis der Straffheit mittels des Kriteriums (15.1)

Details: siehe Karatzas/Shreve, pp. 60-70

Lemma 15.9 (Maximal-Ungleichung).

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda > 0$

$$P\left(\max_{i \leq n} \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} |S_i| \geq \lambda\right) \leq 2P\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} |S_n| \geq \lambda - \sqrt{2}\right).$$

Beweis: Sei $\lambda > 2$.

$$\Omega_i = \left\{ \max_{k < i} \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} |S_k| < \lambda \leq \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} |S_i| \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P\left(\max_{i \leq n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |S_i| \geq \lambda\right) \\ \leq P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |S_n| \geq \lambda - \sqrt{2}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} P(\Omega_i \cap \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |S_n| < \lambda - \sqrt{2}\right\}). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Aber $|S_i| \geq \lambda\sqrt{n}\sigma$ und $|S_n| \leq (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{n}\sigma$ implizieren $|S_n - S_i| > \sqrt{2}\sqrt{n}\sigma$.
Wegen der Unabhängigkeit der (ξ_i) folgt mit Chebyshev:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} P(\Omega_i \cap \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |S_n| < \lambda - \sqrt{2}\right\}) \\ \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(\Omega_i) \cdot P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |S_n - S_i| \geq \sqrt{2}\right) \text{ wegen der Unabhängigkeit} \\ \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(\Omega_i) \frac{(n-i)\sigma^2}{2n\sigma^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} P(\Omega_i) \text{ wegen Chebyshev} \\ \leq \frac{1}{2} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda\right). \end{aligned}$$

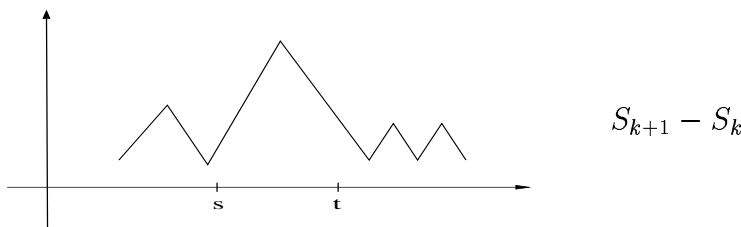
Zusammen mit (15.2) ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 15.10. Für $\epsilon > 0$ und hinreichend große λ, n gilt

$$P\left(\max_{i \leq n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |S_{k+1} - S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{\epsilon}{\lambda^2}.$$

Lemma 15.11. Für alle $T > 0, \epsilon, \eta \in]0, 1[$ existiert ein $\delta \in]0, 1[$, so daß für alle $n \geq 1$

$$P\left(\sup_{\substack{0 \leq s \leq \delta \\ 0 \leq t \leq T}} |X_{t+s}^{(n)} - X_t^{(n)}| \geq \epsilon\right) \leq \eta.$$



Aus dem Lemma 15.11 folgt Straffheit!

f) Anwendung des Invarianzprinzips

1. Seien $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig mit

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2},$$

(“Münzwurf“)

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} S_i \quad \text{“Maximalgewinn“.}$$

Aus dem Reflektionsprinzip von D. André folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} M_n \geq \alpha\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \geq [\alpha\sqrt{n}]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2P(S_n \geq [\alpha\sqrt{n}]) + P(S_n = [\alpha\sqrt{n}])) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq \alpha\sqrt{n}) + 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{für alle } \alpha > 0. \end{aligned}$$

2. Aus dem Invarianzprinzip folgt:

Für die standardisierte Brownsche Bewegung gilt mit $X_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$:

$$P(X_t^* \geq \alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx.$$

Denn: o.B.d.A. $t = 1$ (Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung).

Für $h(v) = \sup_{0 \leq s \leq 1} v(s)$ gilt: h ist stetig auf \mathcal{C}_0

$$\Rightarrow h(P^{(n)}) \longrightarrow h(P_0).$$

$$P_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{nt}} \longrightarrow P_0 \quad \text{auf } \mathcal{C}_0$$

Korollar 15.12 (Maximum-Verteilung).

(i) Seien $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt mit Erwartungswert = 0 und var = 1, sowie

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \xi_i & M_n &= \max_{1 \leq i \leq n} S_i \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} M_n \geq \alpha\right) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \geq \alpha\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

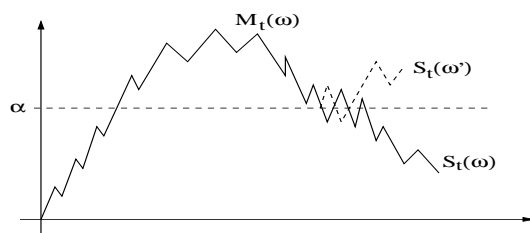
(ii) Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung

$$X_t^* = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$$

$$\Rightarrow P(X_t^* \geq \alpha) = 2P(X_t \geq \alpha) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Beweis:

- (i) für symmetrische Irrfahrten
→ folgt aus dem Spiegelungsprinzip.



- Mit dem Invarianzprinzip folgt daraus (ii).
- Mit dem Invarianzprinzip folgt aus (ii) auch (i) für beliebige Irrfahrten. \square

Teil V

Anhang

Kapitel 16

Maße auf topologischen Räumen

a) Topologische Räume

Sei S ein topologischer Raum.

- Borelsche σ -Algebra

$$\mathcal{B}(S) = \sigma(\{A \subset S : A \text{ offen}\})$$

- universell-meßbare σ -Algebra

$$\mathcal{B}^u(S) = \bigcap_{\mu} \mathcal{B}^{\mu}(S)$$

mit \bigcap_{μ} über alle W-Maße μ auf $(S, \mathcal{B}(S))$ und $\mathcal{B}^{\mu}(S) = \mu$ -Vervollständigung von $\mathcal{B}(S)$

- Baire'sche σ -Algebra

$$\mathcal{B}_0(S) = \sigma(\{f : S \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\})$$

Es gilt

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}^u$$

und $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, falls S metrisierbar

[Denn $\forall U$ offen $\subset S : \exists f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $U = \{f > 0\}$.
z.B. $f(x) = d(x, S \setminus U)$]

Proposition 16.1. *Sei S Teilmenge eines topologischen Raumes S' .
Dann gilt:*

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(S) \quad (\text{ bzw. } \in \mathcal{B}^u(S)) & \Leftrightarrow \\ \exists A' \in \mathcal{B}(S') \quad (\text{ bzw. } \in \mathcal{B}^u(S')) & \text{ mit } A = A' \cap S. \end{aligned}$$

[m.a.W. $\mathcal{B}(S)$ ist Spur von $\mathcal{B}(S')$ auf S , analog $\mathcal{B}^u(S)$]

Beweis: Zunächst gilt offenbar

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(S) &= \sigma(\{S \cap U' : U' \text{ offen } \subset S'\}) \\ &\subset \sigma(\{S \cap A' : A' \text{ Borel } \subset S'\}) \\ &= \{S \cap A' : A' \text{ Borel } \subset S'\} = S \cap \mathcal{B}(S').\end{aligned}$$

Umgekehrt sei $\mathcal{A}' = \{A' \subset S' : S \cap A' \in \mathcal{B}(S)\}$. Dann gilt:
 \mathcal{A}' ist σ -Algebra auf S' und erhält die offenen Mengen von S' .
 Folglich

$$S \cap \mathcal{B}(S') \subset S \cap \mathcal{A}' = \mathcal{B}(S).$$

□

Wiederholung

Definition: Der topologische Raum S

- ist separabel $\Leftrightarrow \exists$ abzählbar $S_0 \subset S : \overline{S_0} = S$.
- besitzt abzählbare Basis $\Leftrightarrow \exists$ abzählbare $\tau_0 \subset \tau = \text{Topologie}$, τ_0 erzeugt τ .
- ist (vollständig) metrisierbar $\Leftrightarrow \exists$ (vollständige) Metrik d auf S : d erzeugt Topologie τ von S .

Es gilt: • Sei S metrisierbar. Dann: separabel \Leftrightarrow abzählbare Basis.

- Sei S kompakt. Dann (Urysohn!):

(vollständig) metrisierbar \Leftrightarrow abzählbare Basis.

Proposition 16.2. *Ein topologischer Raum S ist genau dann metrisierbar und separabel, wenn er homöomorph ist zu einer Teilmenge \hat{S} eines kompakten metrischen Raumes \hat{S} (o.B.d.A. $\hat{S} = [0, 1]^{\mathbb{N}}$).*

Beweis:

“ \Rightarrow “: Sei $\{s_n\}_n$ dicht $\subset S$ und d Metrik auf S , o.B.d.A. $d < 1$ (ansonsten ersetze d durch $\frac{d}{d+1}$).

- Def. $\hat{S} = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ (z.B. mit $\hat{d}(y, z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} |y_n - z_n|$) und

$$\Phi : S \rightarrow \hat{S} \text{ durch} \\ x \mapsto (d(x, s_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

⇒ Φ ist stetig:

$$\begin{aligned} \hat{d}(\Phi(x), \Phi(x')) &= \sum 2^{-n} |d(x, s_n) - d(x', s_n)| \\ &\leq \sum 2^{-n} d(x, x') = d(x, x') \end{aligned}$$

- Umgekehrt gilt: $x_k \not\rightarrow x$ in S
 ⇒ $\exists \epsilon > 0 : d(x_k, x) > \epsilon$ für unendlich viele k
 ⇒ $\exists n : d(x_k, s_n) > \frac{\epsilon}{2}$ für unendlich viele k ($\forall n$ mit $d(s_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$)
 ⇒ $\Phi(x_k) \not\rightarrow \Phi(x)$.

Also Φ Homöomorphismus zwischen S und $\Phi(S) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$.

“ \Leftarrow “ S metrisierbar [durch $d(x, y) = \hat{d}(\Phi(x), \Phi(y))$].

Ferner: Topologie von S hat abzählbare Basis [nämlich $\Phi^{-1}(U \cap S)$ mit $U \in$ abzählbare Basis von \hat{S}]. □

Definition 16.3.

- S heißt **polnischer Raum**, falls er separabel und vollständig metrisierbar ist. D.h. \exists vollständige Metrik d auf S : d erzeugt Topologie und Topologie besitzt abzählbare Basis ($\Leftrightarrow \exists$ abzählbar, dichte Menge in S).
- Der topologische Raum S heißt **topologischer Lusin-Raum** (bzw. **topologischer Radon-Raum**), falls S homöomorph zu Borel-meißbarer (bzw. universell meißbarer) Teilmenge \tilde{S} eines kompakten metrischen Raumes \hat{S} . [d.h. $\exists \hat{S}, \exists \tilde{S}, \exists \Phi : S \rightarrow \hat{S}$ stetig, $\Phi^{-1} : \tilde{S} \rightarrow S$ stetig]

Proposition 16.4. Ein topologischer Raum S ist genau dann polnisch, wenn er homöomorph ist zu G_δ -Menge \tilde{S} eines kompakten metrischen Raumes \hat{S} .

Beweis: Details siehe Bourbaki, Querenburg. □

Beweisidee: O.B.d.A. $\hat{S} = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, Φ wie im Beweis von Proposition 16.2.

- Konstruktion der G_δ 's: Wähle Metrik d' auf $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
 $\forall m \in \mathbb{N}$ sei G_m Vereinigung aller offenen Kugeln $B \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$ mit:

$$\text{center}(B) \in \Phi(S), \quad \text{diam}(B) \leq \frac{1}{m}, \quad \text{diam}(\Phi^{-1}(B)) \leq \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \Phi(S) \subset \bigcap_m G_m.$$

- $\forall y \in \bigcap_m G_m : \forall m : \exists$ offene Kugel $B_m \ni y$ mit Mittelpunkt $\Phi(x_m)$, $x_m \in S$

$$\text{diam}(B_m) \leq \frac{1}{m}, \quad \text{diam}(\Phi^{-1}(B_m)) \leq \frac{1}{m}.$$

Wegen $\Phi(x_m) \rightarrow y$ folgt $y \in \overline{\Phi(S)}$.

$$\Rightarrow \forall k, m : \exists x' \in S : \Phi(x') \in B_k \cap B_m$$

$$\Rightarrow d(x_k, x_m) \leq d(x_k, x') + d(x', x_m) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{m}$$

z.B. $V_m(x) = B'_r(\Phi(x))$ mit $r \leq \frac{1}{m}$

$$\text{und } \Phi^{-1}(B'_r(\Phi(x))) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) = \Phi^{-1}(\Phi(S) \cap B'_r(\Phi(x)))$$

mit V_m offen $\subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$:

- $\Phi(x) \in V_m(x)$
- $V_m(x) \subset B'_{\frac{1}{m}}(\Phi(x))$
- $\Phi^{-1}(V_m(x)) \subset B_{\frac{1}{m}}(x)$

$$\Rightarrow (x_k)_k \text{ Cauchy} \Rightarrow \exists \text{ Limes } x$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \lim \Phi(x_k) = y$$

$$\Rightarrow y \in \Phi(S)$$

$$\Phi(S) = \bigcap G_m.$$

□

Korollar 16.5. Jeder polnische Raum ist ein Lusin-Raum.

Satz 16.6. S ist genau dann ein topologischer Raum der folgenden Art:

$$kpt \text{ metr.} \subset \text{ lokal kpt} + \text{ abz. Basis} \subset \text{ polnisch} \subset \text{ Lusin} \subset \text{ Radon} \subset \text{ metr. sep.},$$

wenn er homöomorph ist zu einer wie folgt charakterisierten Teilmenge \tilde{S} eines kompakten metrischen Raumes \hat{S} :

$$\tilde{S} = \hat{S} \subset \text{ offen} \subset G_\delta \subset \text{ Borel} \subset \text{ univ. meßb.} \subset \text{ bel..}$$

Hinweis: Es gibt eine abweichende Definition, die nicht verlangt, daß Lusin- bzw. Radon-Räume metrisierbar sind.

b) Der Rieszsche Darstellungssatz

Satz 16.7 (von Riesz). Sei S kompakt, metrisierbar. Dann gilt: zu jeder positiven Linearform I auf $\mathcal{C}(S)$ existiert genau ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_b(S)$ mit

$$I(f) = \int f d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{C}(S)).$$

[Und umgekehrt!]

Beweis:

- Eindeutigkeit: Seien μ_1, μ_2 mit $I(f) = \int f d\mu_i$ ($\forall f \in \mathcal{C}(S)$)

$$\forall U \subset S \text{ offen} : \exists f_n \in \mathcal{C}(S) \text{ mit } f_n \uparrow \mathbf{1}_U$$



$$\Rightarrow \mu_i(U) = \int \mathbf{1}_U d\mu_i = \sup_n \int f_n d\mu_i = \sup_n I(f_n)$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \text{ auf } \{U : U \text{ offen } \subset S\}, \cap\text{-stabiler Erzeuger von } \mathcal{P}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \text{ auf } \mathcal{P}.$$

- Existenz: Definiere

$$\forall U \text{ offen: } \mu^*(U) := \sup\{I(f) : f \in \mathcal{C}(X), f \leq \mathbf{1}_U\}$$

$$\forall A \text{ beliebig: } \mu^*(A) := \inf\{\mu^*(U) : U \supset A, U \text{ offen}\}$$

$$\Rightarrow (1) \mu^* \text{ ist \u00e4u\u00dferes Ma\u00df auf } S$$

$$\Rightarrow (2) \text{ Die Mengen aus } \mathcal{P} \text{ sind } \mu^*\text{-me\u00dfbar} \Rightarrow [\text{Bauer}]$$

$$\Rightarrow \text{Die Einschr\u00e4nkung } \mu \text{ von } \mu^* \text{ auf } \mathcal{P} \text{ ist ein Ma\u00df auf } (S, \mathcal{P}).$$

- Darstellungseigenschaft:

Sei $f \in \mathcal{C}(S)$ und $\epsilon > 0$. o.B.d.A. $f \geq 0$.

$\Rightarrow \exists$ Zahlen $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n$ mit $|y_i - y_{i-1}| < \epsilon$ und $0 \leq f(x) < y_n$ ($\forall x \in S$).

\exists disjunkte Borel-Mengen $A_i = \{y_{i-1} \leq f < y_i\} \subset S$ ($i = 1, \dots, n$)

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

$\Rightarrow \exists$ offene Mengen $U_i \supset A_i$ mit $U_i \subset \{f < y_i\}$ und $\mu(U_i \setminus A_i) \leq \frac{\epsilon}{n}$.

\Rightarrow ("Überdeckung der Eins"): $\exists \psi_i \geq 0, \in \mathcal{C}(X), \sum_{i=1}^n \psi_i \equiv 1, \text{supp}(\psi_i) \subset U_i$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f &= \sum_{i=1}^n f \cdot \psi_i \\
\Rightarrow I(f) &= \sum_{i=1}^n I(f \cdot \psi_i) \\
&\leq \sum y_i \cdot I(\psi_i) \leq \sum y_i \cdot \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^n y_i \cdot \left(\mu(A_i) + \frac{\epsilon}{n} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i - \epsilon) \cdot \mu(A_i) + \epsilon \cdot \mu(S) + \epsilon \cdot y_n \\
&\leq \int f d\mu + \epsilon \mu(S) + \epsilon y_n.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow I(f) \leq \int f d\mu.$
 Analog $I(-f) \leq -\int f d\mu \Rightarrow \dots\dots\dots$ □

Korollar 16.8. Sei S kompakt, metrisierbar. Dann definiert

$$\mu \mapsto I_\mu = (f \mapsto \int f d\mu)$$

einen Homöomorphismus von $\mathcal{M}_1(S)$ (mit schwacher Topologie) nach $\mathcal{C}^*(S)$ (mit schwach*-Topologie).

Bemerkung:

- (1) $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{C}^*(S)$ mit schwach*-Topologie
 $\Leftrightarrow \varphi_n(f) \rightarrow \varphi(f)$ in \mathbb{R} ($\forall f \in \mathcal{C}(S)$) also punktweise in $\mathcal{C}^*(S)$.
- (2) Starke Topologie in $\mathcal{C}^*(S) =$ Normtopologie:

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(f)| : f \in \mathcal{C}(S), |f| \leq 1\}$$

Satz 16.9. S kompakt + metrisierbar $\implies \mathcal{M}_1(S)$ kompakt + metrisierbar.

Beweis: der Kompaktheit:

Betrachte Homöomorphismus

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathcal{M}_1(S) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{C}(S)} \\
\Phi(\mathcal{M}_1) &= \{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}(S)} : \varphi \text{ linear}, \geq 0, \varphi(1) = 1\} = \mathcal{L}_{1,+} \\
&\subset \mathcal{C}^*(S) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{C}(S)}
\end{aligned}$$

- (1) $\Phi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_{1,+}$ homöomorph (“Riesz“)
- (2) $\mathcal{L}_{1,+}$ abgeschlossen in $\mathcal{L}_{\leq 1} = \{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}(S)} : \varphi \text{ linear, } \|\varphi\| \leq 1\}$
- (3) $\mathcal{L}_{\leq 1}$ kompakt (“Banach-Alaoglu“)

Alternativ:

(2') $\mathcal{L}_{1,+}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^{\mathcal{C}(S)}$

(3') $\mathcal{L}_{1,+} \subset \underbrace{\prod_{f \in \mathcal{C}(S)} \underbrace{[\inf_S f, \sup_S f]}_{\text{kompakt}}}_{\text{kompakt}} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{C}(S)}$
 (“Tychonov“)

$\Rightarrow \mathcal{L}_{1,+}$ kompakt $\Rightarrow \mathcal{M}_1$ kompakt

Die Metrisierbarkeit folgt aus dem nächsten Satz. □

Satz 16.10. S polnisch (Lusin, metrisierbar separabel) $\implies \mathcal{M}_1(S)$ polnisch (Lusin, metrisierbar separabel).

Und zwar kann man als vollständige Metrik auf $\mathcal{M}_1(S)$ wählen:

$$\begin{aligned} d(\mu, \nu) &= \inf\{\epsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon \text{ und } \nu(A) \leq \mu(A^\epsilon) + \epsilon \forall A \text{ Borel } \subset S\} \\ &= \inf\{\epsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon \forall A \text{ abgeschlossen } \subset S\} \end{aligned}$$

mit $A^\epsilon = \{x \in S : d(x, A) \leq \epsilon\}$.

Ohne Beweis!

Alternative Metrik (nicht vollständig!, falls S nicht kompakt):

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \left| \int f_n d\mu - \int f_n d\nu \right|$$

mit $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{C}_b(S)$.

Dicht in $\mathcal{M}_1(S)$ liegt z.B.

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \delta_{x_k} : n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in [0, 1], \sum \alpha_k = 1 \right\}$$

für $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ dicht in S .
 $=\text{conv}\{\delta_{x_k} : k \in \mathbb{N}\}$.

c) Der Satz von Prohorov

Definition 16.11. Eine Menge $W \subset \mathcal{M}_1(S)$ von W -Maßen heißt **straff**, falls
 $\forall \epsilon > 0 : \exists$ kompakte Menge $K_\epsilon \subset S :$

$$\mu(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon \quad \forall \mu \in W.$$

Satz 16.12 (von Prohorov). Sei S polnischer Raum. Eine Menge $W \subset \mathcal{M}_1(S)$ ist genau dann relativ-kompakt, falls sie straff ist.

Beweis: Sei $W \subset \mathcal{M}_1(S)$ straff und $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \subset W$. Betrachte die Abbildung
 $\Phi : S \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$, definiert wie vorher.

Dann ist $\overline{\Phi(S)}$ kompakt.

$\forall n \in \mathbb{N}$ definiere Bildmaß $\bar{\mu}_n \in \mathcal{M}_1(\overline{\Phi(S)})$ durch $\bar{\mu}_n(A) = \mu_n(\Phi^{-1}(A))$ ($\forall A$ Borel
 $\subset \overline{\Phi(S)}$)

$\Rightarrow \{\bar{\mu}_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativ-kompakt in $\mathcal{M}_1(\overline{\Phi(S)})$

$\Rightarrow \forall$ Teilfolge $(n_l)_l$ existiert eine Teilfolge $(n_k)_k \subset (n_l)_l$ und $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(\overline{\Phi(S)}) :$

$$\bar{\mu}_{n_k} \rightarrow \bar{\mu}.$$

Verwende nun die Straffheit:

$\forall m \in \mathbb{N} : \exists K_m$ kompakt $\subset S : \mu_n(K_m) \geq 1 - \frac{1}{m}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow \Phi(K_m)$ kompakt $\subset \overline{\Phi(S)}$ und

$$\bar{\mu}(\Phi(K_m)) \geq \limsup_k \bar{\mu}_{n_k}(\Phi(K_m)) = \limsup_k \mu_{n_k}(K_m) \geq 1 - \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow 1 \geq \bar{\mu}(\Phi(S)) \geq \bar{\mu} \left(\bigcup_m \Phi(K_m) \right) \geq 1$$

$$\Rightarrow \mu' = \bar{\mu}|_{\Phi(S)} \in \mathcal{M}_1(\Phi(S)).$$

Definiere nun das Bildmaß (unter Φ^{-1}) von μ'

$$\mu(A) = \mu'(\Phi(A)) \quad (\forall \text{ Borel } A \subset S)$$

$$\Rightarrow \limsup_k \mu_{n_k}(F) = \limsup_k \bar{\mu}_{n_k}(\Phi(F)) \leq \bar{\mu}(\Phi(F)) = \mu(F)$$

(\forall abgeschlossenen $F \subset S$)

$$\Rightarrow \mu_{n_k} \rightarrow \mu \text{ in } \mathcal{M}_1(S)$$

Damit: W relativ-folgenkompakt $\Rightarrow W$ relativ-kompakt.

Umgekehrt: Sei W relativ-kompakt. Wähle $\{s_i : i \in \mathbb{N}\}$ dicht in S .

Def. $G_k^n = \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{1}{k}}(s_j)$ mit $B_r(x)$ offene Kugel bzgl. einer Metrik d in S .

$\Rightarrow \mu \mapsto \mu(G_k^n)$ ist nach unten halbstetig auf $\mathcal{M}_1(S)$

(denn $\mu_l \rightarrow \mu \Rightarrow \liminf_l \mu_l(G) \geq \mu(G)$)

und $\mu(G_k^n) \uparrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ (denn $G_k^n \uparrow S$ für $n \rightarrow \infty$).

Nach Dini: $\mu(G_k^n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $\mu \in \bar{W}$ (=kompakt!), d.h.
 $\forall \epsilon > 0, k \in \mathbb{N} : \exists n = n(k, \epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{\mu \in \bar{W}} \mu(G_k^{n(k, \epsilon)}) \geq 1 - \epsilon \cdot 2^{-k}$$

$\Rightarrow K = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k^{n(k, \epsilon)}}$ erfüllt

$$\inf_{\mu \in \bar{W}} \mu(K) \geq 1 - \epsilon.$$

Ferner ist offenbar K abgeschlossen + total beschränkt (= präkompakt)
 $\Rightarrow K$ ist kompakt (denn S ist vollständig metrisierbar). □

d) Regularität und Straffheit von W-Maßen

Definition 16.13. Ein W -Maß μ auf einem topologischen Raum S heißt

(i) **regulär**, falls $\forall A \in \mathcal{B}(S)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\mu(U) : U \text{ offen } \supset A\} && \text{(äußere Regularität)} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt } \subset A\} && \text{(innere Regularität)} \end{aligned}$$

(ii) **straff** (engl. tight), falls

$$\mu(S) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt}\}.$$

Satz 16.14. Sei S kompakt metrisierbar. Dann ist jedes W -Maß μ auf S regulär.

Beweis: Wegen S kompakt und $\mu(S) < \infty$ gilt:

$$\text{äußere Regularität} \Leftrightarrow \text{innere Regularität}$$

denn:

$$\begin{aligned} \mu(A^c) &= \inf\{\mu(U) : U \text{ offen } \supset A^c\} \\ &= 1 - \sup\{\mu(K^c) : K \text{ kompakt } \subset A\} \end{aligned}$$

Äußere Regularität folgt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz. □

Satz 16.15. Sei S topologischer Radon-Raum. Dann ist jedes W -Maß auf S straff.

Bemerkung: Es gilt auch folgende Umkehrung. Sei S separabel metrisierbar und jedes W -Maß auf S straff (d.h. jedes W -Maß ist ein "Radon-Maß"). Dann ist S topologischer Radon-Raum.

Beweis: Sei $S = \tilde{S}$ universell meßbare Teilmenge von \hat{S} kompakt metrisierbar.

Sei μ W -Maß auf $(S, \mathcal{B}(S))$

\Rightarrow fortsetzbar zu W -Maß auf $(S, \mathcal{B}^u(S))$ (durch $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{B}^u \setminus \mathcal{B}$)

\Rightarrow fortsetzbar zu W -Maß auf $(\hat{S}, \mathcal{B}^u(\hat{S}))$ (durch $\mu(A \setminus S) = 0 \ \forall A \in \mathcal{B}^u(\hat{S})$)

Wegen $S \in \mathcal{B}^u(\hat{S}) : \exists S_0 \in \mathcal{B}(\hat{S})$ mit $S_0 \subset S$ und

$$\mu(\hat{S} \setminus S_0) = 0$$

Wegen (innerer) Regularität von μ auf kompaktem metrisierbarem \hat{S} :

$$\mu(S) = \mu(S_0) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt } \subset S_0 \subset S\}. \quad \square$$

Korollar 16.16. Jedes W -Maß auf einem topologischem Radon-Raum ist regulär.

Beweis: genügt zu zeigen: innere Regularität!

Hierzu A Borel $\subset S$ universell meßbar $\subset \hat{S}$, d.h. A universell meßbar $\subset \hat{S}$

$$\Rightarrow \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt } \subset A\} \quad \square$$

e) Lusin- und Radon-Meßräume, reguläre bedingte Verteilungen

Definition 16.17.

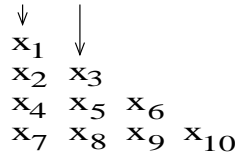
- (i) Eine meßbare Isometrie zwischen Meßräumen (E, \mathcal{E}) und (F, \mathcal{F}) ist eine Bijektion $\psi : E \rightarrow F$ mit ψ ist \mathcal{E}/\mathcal{F} -meßbar und ψ^{-1} ist \mathcal{F}/\mathcal{E} -meßbar.
- (ii) Ein Meßraum (E, \mathcal{E}) heißt **Lusin-Meßraum** (bzw. **Radon-Meßraum**), falls \exists topologischer Lusin-Raum (bzw. topologischer Radon-Raum) S und meßbare Isomorphie zwischen (E, \mathcal{E}) und $(S, \mathcal{B}(S))$ (bzw. $(S, \mathcal{B}^u(S))$).

- Lusin-Meßräume heißen auch meßbare Lusin-Räume oder Standard-Borel-Räume.
Radon-Meßräume heißen auch meßbare Radon-Räume oder Absolut-Borel-Räume.

Satz 16.18. Jeder Lusin- (bzw. Radon-) Meßraum ist meßbar isomorph zu einer Borel- (bzw. universell-) meßbaren Teilmenge von $[0, 1]$.

Beweis(skizze): o.B.d.A. $S = [0, 1[^\infty$ (und $B = [0, 1]$).

Definition $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[^\infty$ durch $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ mit $f_1(x) = 0.x_1x_2x_4x_7 \dots, f_2(x) = 0.x_3x_5x_8 \dots$, falls $x = 0.x_1x_2 \dots$ in Binärdarstellung (mit ∞ -vielen 0).



und $\varphi : [0, 1[^\infty \rightarrow [0, 1[$ durch $\varphi(x) = 0.x_1^1x_2^1x_1^2x_3^1x_2^2x_1^3x_4^1 \dots$, falls $x = (x^1, x^2, \dots)$ mit $x^i = 0.x_1^i x_2^i \dots$ in Binärdarstellung (mit ∞ -vielen 0).

Offenbar: • f, φ meßbar
 • $f = \varphi^{-1}$ □

Gegeben $(\Omega, \mathcal{A}, P), (S, \mathcal{Y}); X : \Omega \rightarrow S, \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$

Satz 16.19. *Ist S Radon-/Lusin-Meßraum, so existiert eine reguläre bedingte Verteilung von X unter \mathcal{A}_0 , d.h. eine Abbildung $K : \Omega \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$ mit*

- (i) $\forall \omega \in \Omega : K(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}_1(S)$
- (ii) $\forall B \in \mathcal{Y} : K(\cdot, B) = P(X \in B | \mathcal{A}_0)$ P -f.s.
 [d.h. $K(\cdot, B)$ ist Version der bedingten Verteilung von X unter \mathcal{A}_0].

*Diese reguläre bedingte Verteilung ist eindeutig im folgenden Sinne:
 zu zwei solchen $K, K' : P$ -f.s.: $\forall B \in \mathcal{Y} : K(\cdot, B) = K'(\cdot, B)$.*

Beweis:

1. Reduktion auf $S = \mathbb{R}$:

$$\exists \varphi : S \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar, } \varphi : S \rightarrow \varphi(S) \text{ bijektiv, } \varphi^{-1} \text{ meßbar}$$

Ersetze X durch $\varphi(X)$, B durch $\varphi(B)$.
 \Rightarrow o.B.d.A. $S = \mathbb{R}$.

2. Konstruktion einer Verteilungsfunktion: $\exists \Omega_1$ mit $P(\Omega_1) = 1, \exists G : \Omega_1 \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (i) $\forall \omega \in \Omega_1 : q \mapsto G(\omega, q)$ isoton
- (ii) $\forall q \in \mathbb{Q} : \omega \mapsto G(\omega, q)$ Version von $P(X \leq q | \mathcal{A}_0)$

Betrachte $F : \Omega_1 \times \mathbb{R}$

$$F(\omega, x) = \inf\{G(\omega, q) : q \in \mathbb{Q}, q > x\}$$

\Rightarrow (Für P -f.a. $\omega \in \Omega_1$;))

o.B.d.A. $\forall \omega \in \Omega_1 : x \mapsto F(\omega, x)$ isoton, rechtsseitig stetig

\Rightarrow o.B.d.A. $\forall \omega \in \Omega_1 : \exists! \mu(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \mu(\omega,] - \infty, x]) = F(\omega, x) (\forall x \in \mathbb{R})$

3. Identifizierung als bedingte Verteilung:

$\forall x \in \mathbb{R}$ und für P -fast alle $\omega \in \Omega_1$:

$$\mu(\omega,] - \infty, x]) = F(\omega, x) = \inf_{\substack{q > x \\ q \in \mathbb{Q}}} P(X \leq q | \mathcal{A}_0)(\omega) = P(X \leq x | \mathcal{A}_0)(\omega),$$

wegen monotoner Konvergenz der bedingten Verteilungen.

4. Betrachte nun

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu(\omega, A) = P(X \in A | \mathcal{A}_0)(\omega) \text{ für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega_1\}$$

$$\Rightarrow] - \infty, x] \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k]a_i, b_i] \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}.$$

$$5. \underline{\text{Def.}} K(\omega, B) = \begin{cases} \mu(\omega, B) & , \omega \in \Omega_1 \\ \nu(B) & , \omega \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \quad \square$$

Bemerkung:

1.) Im Fall $\Omega = S$, $X = \text{id}$ heißt dieses $K : S \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$ **reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit** unter \mathcal{A}_0 . Es gilt:

- $\forall \omega \in S : K(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}_1(S)$
- $\forall B \in \mathcal{Y} : K(\cdot, B) = P(B | \mathcal{A}_0)$ P -f.s.

2.) Es gilt $\forall f \geq 0$ meßbar:

$$\int f(y) K(\omega, dy) = E(f | \mathcal{A}_0)(\omega) \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega.$$

Korollar 16.20 (Desintegration von Maßen). Seien S_1, S_2 Radon- (bzw. Lusin-) Meßräume, $\mu \in \mathcal{M}_1(S_1 \times S_2)$ und μ_1 das Bild von μ unter der Projektion $S_1 \times S_2 \rightarrow S_1$. Dann existiert eine Abbildung $K : S_1 \times \mathcal{Y}_2 \rightarrow [0, 1]$ mit
(1) $\forall x_1 \in S_1 : K(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(S_2)$

$$(2) \mu(dx_1 dx_2) = \mu_1(dx_1) K(x_1, dx_2)$$

Beweis: Vorhergehender Satz 16.19 mit $\Omega = S_1 \times S_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$, $P = \mu$
 $\mathcal{A}_0 = \{A \times S_2 : A \in \mathcal{Y}_1\}$ und $X : \Omega \rightarrow S_2$ Projektion. \square

Kapitel 17

Operator-Halbgruppen

a) Stark stetige Kontraktionshalbgruppen

Im folgenden sei B ein Banachraum (mit Norm $\|\cdot\|$), z.B. $B = L^p(E, \mathcal{B})$ oder $\mathcal{C}_0(E)$.

Definition 17.1. Eine Familie $(T_t)_{t \geq 0}$ von linearen Operatoren auf B mit $\mathcal{D}(T_t) = B$ für alle t heißt **stark stetige Kontraktionshalbgruppe** auf B , falls

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} T_t u = T_0 u = u \text{ für alle } u \in B \quad \underline{\text{“starke Stetigkeit (in 0)“}}$$
$$\text{d.h. } \lim_{t \rightarrow 0} \|T_t u - u\| = 0,$$

$$(ii) \|T_t u\| \leq \|u\| \text{ (für alle } t \geq 0, u \in B) \quad \underline{\text{“Kontraktion“}}$$
$$\text{bzw. } \|T_t\| \leq 1,$$

$$(iii) T_t \circ T_s = T_{t+s} \text{ für alle } s, t \geq 0 \quad \underline{\text{“Halbgruppeneigenschaft“}}.$$

Bemerkung:

Für alle $u \in B$ ist $t \mapsto T_t u$ stetig auf $[0, \infty[$.

Denn $\|T_{t+\epsilon} u - T_t u\| = \|T_\epsilon(T_t u) - T_t u\| \rightarrow 0$ für $\epsilon \searrow 0$.

$$\|T_t u - T_{t-\epsilon} u\| \stackrel{(iii)}{=} \|T_{t-\epsilon}(T_\epsilon u - u)\|$$
$$\stackrel{(ii)}{\leq} \|T_\epsilon u - u\| \stackrel{(i)}{\rightarrow} 0 \text{ für } \epsilon \searrow 0.$$

Definition 17.2. Für eine stark stetige Kontraktions-Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ ist der **infinitesimale Erzeuger** $(A, \mathcal{D}(A))$ definiert als linearer Operator auf B durch

$$Au = \lim_{(0 <) t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t u - u)$$

für $u \in \mathcal{D}(A) = \{v \in B : \lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t v - v) \text{ existiert in } B\}$.

Proposition 17.3. Für alle $u \in \mathcal{D}(A)$ und alle $t \geq 0$ ist $T_t u \in \mathcal{D}(A)$ und

$$\frac{d}{dt} T_t u = A T_t u = T_t A u. \quad (*)$$

Beweis: Sei $t \geq 0$ fest und $f \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{s} (T_s(T_t f) - T_t f) &= \lim_{s \searrow 0} T_t \left(\frac{1}{s} (T_s f - f) \right) \\ &= T_t A f \text{ existiert, d.h.} \\ &\quad T_t f \in \mathcal{D}(A) \text{ und } A T_t f = T_t A f. \end{aligned}$$

Ferner: $t \mapsto T_t f$ hat rechtsseitige Ableitung $T_t A f$.

Betrachte nun: $t \mapsto \int_0^t T_s A f ds$ ist differenzierbar mit Ableitung $T_t A f$.

Beide Funktionen sind stetig und besitzen dieselbe rechtsseitige Ableitung.

$$\Rightarrow \quad T_t f = \int_0^t T_s A f ds + g$$

mit g konstant in t . □

Bemerkung:

Formales Lösen von (*) als DGL führt zu $T_t = e^{At}$.

Proposition 17.4. $\mathcal{D}(A)$ liegt dicht in B und A ist ein abgeschlossener Operator.

Beweis:

$$\text{Sei} \quad A_h f = \frac{1}{h} (T_h f - f) \text{ und } V_s f = \frac{1}{s} \int_0^s T_t f dt.$$

Beides sind beschränkte Operatoren auf B , und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{sh} \left(\int_s^{s+h} T_t dt - \int_0^h T_t dt \right) &= A_h \circ V_s = V_s \circ A_h \\ &= A_s \circ V_h = V_h \circ A_s. \end{aligned}$$

\Rightarrow Für alle $s > 0$ und alle $f \in B$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_h V_s f = \lim_{h \rightarrow 0} A_s V_h f = A_s f \quad \Rightarrow \quad V_s f \in \mathcal{D}(A).$$

Wegen $f = \lim_{s \rightarrow 0} V_s f$ folgt: $\mathcal{D}(A)$ ist dicht in B .

Sei nun $(f_n)_n$ Folge in $\mathcal{D}(A)$, $f, g \in B$ mit $f_n \rightarrow f$ in B , $Af_n \rightarrow g$ in B .

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_s g &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_s A f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_s (\lim_{h \rightarrow 0} A_h f_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} A_s (V_h f_n) = \lim_n A_s f_n = A_s f, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g = \lim_{s \rightarrow 0} V_s g = \lim_{s \rightarrow 0} A_s f = A f \text{ und } f \in \mathcal{D}(A),$$

$\Rightarrow A$ ist abgeschlossener Operator. □

Proposition 17.5. Für alle $\alpha > 0$ ist die Abbildung $u \mapsto (\alpha - A)u$ eine Bijektion von $\mathcal{D}(A)$ nach B . Die inverse Abbildung ist

$$G_\alpha : f \mapsto \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f dt.$$

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{aligned} G_\alpha(\alpha f - A f) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t(\alpha f - A f) dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} T_t f dt \\ &= f, \text{ nach partieller Integration.} \end{aligned}$$

Umgekehrt sei $f \in B$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} A_h G_\alpha f &= \lim_{h \rightarrow 0} G_\alpha A_h f \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t \left(\frac{T_h f - f}{h} \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} T_t f dt \\ &= \alpha G_\alpha f - f \text{ existiert,} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_\alpha f \in \mathcal{D}(A) \text{ und } A G_\alpha f = \alpha G_\alpha f - f, \text{ also } (\alpha - A)G_\alpha f = f.$$

□

Bemerkungen:

a) Schreibt man $T_t = e^{At}$, so folgt "formal"

$$G_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{At} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha - A)t} dt = (\alpha - A)^{-1}.$$

b) Aus der Definition der $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ folgt die Resolventengleichung:

$$\begin{aligned} G_\alpha &= G_\beta + (\beta - \alpha)G_\alpha \circ G_\beta \\ &= G_\beta + (\beta - \alpha)G_\beta \circ G_\alpha \end{aligned}$$

für alle $0 < \alpha, \beta$.

c) G_α heißt " α -Potential-Operator".

Bemerkungen: $(P_t)_{t \geq 0}$ sei eine normale (sub-)markowsche Halbgruppe auf (E, \mathcal{B}) , und es sei

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{B}_b \\ &= \text{Banach -Raum der beschränkten } \mathcal{B}\text{-meßbaren Funktionen} \\ &\quad u : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ versehen mit der Supremums-Norm.} \end{aligned}$$

Dann definiert $T_t f(x) = \int_E f(y)P_t(x, dy)$ eine Kontraktionshalbgruppe auf \mathcal{B}_b (für alle $t \geq 0$, alle $f \in B$ und alle $x \in E$) (i.a. ist diese aber nicht stark stetig!).

b) Feller-Halbgruppe

Sei E lokal-kompakt mit abzählbarer Basis und

$$B = \mathcal{C}_0(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig mit } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$$

Banach-Raum mit sup-Norm.

Definition 17.6. $(T_t)_{t \geq 0}$ heißt **Feller-Halbgruppe** auf E , falls es eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{C}_0(E)$ mit $T_t f \geq 0$ für alle $f \geq 0$ ist ($f \in \mathcal{C}_0(E), t \geq 0$).

Proposition 17.7. Zu jeder Feller-Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ auf E existiert genau eine submarkowsche Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ von Kernen auf (E, \mathcal{B}) mit

$$(*) \quad T_t f(x) = \int f(y)P_t(x, dy)$$

für alle $f \in \mathcal{C}_0$, alle x und alle t .

Beweis:

Für alle $t \geq 0$ und alle $x \in E$ ist $t \mapsto T_t f(x)$ eine positive Linearform auf $\mathcal{C}_0(E)$. Nach Satz von Riesz (in etwas allgemeinerer Form als im WS, WT I) existiert ein Maß $\mu(\cdot) = P_t(x, \cdot)$ auf (E, \mathcal{B}) mit $(*)$ und mit $P_t(x, E) = \sup_{0 \leq f \leq 1} T_t f(x) \leq 1$.

Ferner: $x \mapsto \int f(y)P_t(x, dy) = T_t f(x)$ stetig in x , also meßbar!

$\Rightarrow x \mapsto P_t(x, A)$ ist meßbar für alle $A \subset E$, A offen (denn $\mathbb{1}_A = \sup_n f_n$ mit $f_n \in \mathcal{C}_0$).

$\Rightarrow x \mapsto P_t(x, A)$ ist meßbar für alle $A \in \mathcal{B}$ (denn $\{A : x \mapsto P_t(x, A) \text{ meßbar}\}$ ist σ -Algebra).

$\Rightarrow P_t(\cdot, \cdot)$ ist submarkowscher Kern;
Halbgruppen-Eigenschaft folgt aus der für $(T_t)_{t \geq 0}$. □

Bemerkungen:

a) Eine normale submarkowsche Halbgruppe (P_t) von Kernen auf (E, \mathcal{B}) ist eine Feller-Halbgruppe auf E , falls

(i) $P_t f \in \mathcal{C}_0(E)$ für alle $f \in \mathcal{C}_0(E)$, alle $t \geq 0$.

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{C}_0(E)$ und alle $x \in E$.

Beachte: Die starke Stetigkeit in 0 besagt:

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \sup_x |P_t f(x) - f(x)| = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{C}_0.$$

b) Jede submarkowsche Halbgruppe $(P_t)_t$ auf (E, \mathcal{B}) , die normal ist, kann zu einer normalen markowschen Halbgruppe (\bar{P}_t) auf $(E \cup \Delta, \mathcal{B}(E \cup \Delta))$ (durch Einführung eines Friedhofs Δ , siehe Übungen) ergänzt werden.

Satz 17.8. *Zu jeder Feller-Halbgruppe $(P_t)_t$ auf E existiert eine Markowsche Prozeßfamilie (X_t, \mathbb{P}^x) auf $E \cup \{\Delta\}$, so daß für fast alle ω gilt: $t \mapsto X_t(\omega)$ ist rechtsseitig stetig und besitzt linke Limiten.*

Beweis: mit Martingaltheorie, siehe [Revuz/Yor] Kap.III, Th.2.7..

Beispiele 17.9.

1. Gleichmäßige Bewegung nach rechts:

$$E = \mathbb{R}, \quad P_t f(x) = f(x + t).$$

Offenbar Feller!

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f(x) - f(x)) = f'(x)$$

mit $\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}^1, f' \in \mathcal{C}_0\}$.

2. Poisson-Prozeß mit Parameter $\lambda > 0$

$$E = \mathbb{N}_0, \quad P_t f(x) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f(x+k).$$

(P_t) ist Feller-Halbgruppe.

$$\begin{aligned} Af(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f(x) - f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (e^{-\lambda t} (\lambda t f(x+1) + f(x)) - f(x)) \\ &= \lambda (f(x+1) - f(x)) \end{aligned}$$

mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$.

3. Brownsche Bewegung im \mathbb{R}^d

$$E = \mathbb{R}^d, \quad P_t f(x) = \int f(y) g_t(x-y) dy$$

mit $g_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$.

$(P_t)_{t \geq 0}$ ist Feller-Halbgruppe (\rightarrow Analysis II, III).

Es gilt sogar:

$(t, x) \mapsto P_t f(x)$ ist in $\mathcal{C}^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$ für alle $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$.

Es gilt $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$, und für alle $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$:

$$Af = \frac{1}{2} \Delta f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f.$$

Beweis: siehe Übung

4. Brownsche Bewegung im \mathbb{R}^1 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$.

Sei $\alpha > 0$, betrachte

$$\begin{aligned} U_\alpha f(x) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x) dt \\ &= \int u_\alpha(x-y) f(y) dy \\ \text{mit } u_\alpha(x) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} g_t(x) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} - \alpha t\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp(-\sqrt{2\alpha}|x|). \end{aligned}$$

Offenbar ist $U_\alpha f$ für $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ identisch mit $G_\alpha f$ (siehe Proposition 17.5). Also nach Proposition 17.5: $U_\alpha f \in \mathcal{D}(A)$ und

$$(\alpha - A)U_\alpha f = f.$$

Andererseits gilt: $U_\alpha f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} U_\alpha f(x) &= \dots = \alpha U_\alpha f(x) - f(x) \\ \Rightarrow \mathcal{D}(A) &\subset \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}) \text{ und } A = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt: $g \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow f := \alpha g - \frac{1}{2} g'' \in \mathcal{C}_0$$

und $h = g - U_\alpha f$ löst $\frac{1}{2} h'' - \alpha h = 0$
 $\Rightarrow h = 0 \Rightarrow g = U_\alpha f \Rightarrow g \in \mathcal{D}(A)$ □

c) Symmetrische Markow-Halbgruppen und Dirichlet-Formen

Sei (E, \mathcal{B}) beliebiger Meßraum, m Maß auf (E, \mathcal{B}) .

Definition 17.10. Eine (sub-)markowsche Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ von Kernen auf (E, \mathcal{B}) heißt **symmetrisch bezüglich m** (kurz: **m-symmetrisch**), falls

$$P_t(x, dy)m(dy) = P_t(y, dx)m(dx)$$

für alle $t \geq 0$,
m. a. W. falls

$$(*) \quad \int g \cdot P_t f dm = \int f P_t g dm$$

für alle $f, g \geq 0$ meßbar und alle $t \geq 0$.

Proposition 17.11. Zu jeder m-symmetrischen sub-Markow-Halbgruppe $(P_t)_t$ auf (E, \mathcal{B}) existiert genau eine Kontraktionshalbgruppe $(T_t)_t$ auf $L^2(E, \mathcal{B}, m)$ mit

$$P_t u \text{ ist Version von } T_t u$$

für alle $u \in L^2(E, \mathcal{B}, m) \cap \mathcal{B}_b$ und $t \geq 0$.

Alle T_t sind symmetrische Operatoren auf $L^2(E, \mathcal{B}, m)$.

Beweis: Für $u \in L^2(E, \mathcal{B}, m) \cap \mathcal{B}_b$ gilt nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} (P_t u(x))^2 &= \left(\int u(y) P_t(x, dy) \right)^2 \leq \int u^2(y) P_t(x, dy) \\ &= P_t(u^2)(x) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \|P_t u\|^2 &= \int (P_t u)^2 dm \leq \int 1 \cdot P_t(u^2) dm \\ &= \int u^2 P_t \cdot 1 dm \leq \int u^2 dm = \|u\|^2, \end{aligned}$$

d.h. $\|P_t u\| \leq \|u\|$.

Insbesondere folgt: $u = v$ m -fast überall $\Rightarrow P_t u = P_t v$ m -fast überall.

$\Rightarrow T_t u :=$ Äquivalenzklasse von $P_t u \in L^2(E, \mathcal{B}, m)$, wohldefiniert

für alle $u \in L^2 \cap L^\infty$

\Rightarrow (wegen Dichtheit von $L^\infty \cap L^2$ in L^2):

es existiert genau ein beschränkter linearer Operator $T_t : L^2 \rightarrow L^2$ als Fortsetzung mit $\|T_t\| \leq 1$.

Aus (*) folgt:

$$\int f T_t g dm = \int g T_t f dm \quad (**)$$

für alle $f, g \in L^2$ und alle $t \geq 0$. □

Bemerkungen:

a) Unter schwachen Zusatzannahmen ist $(T_t)_t$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf dem Hilbert-Raum $L^2(E, \mathcal{B}, m)$.

b) Stets gilt für die aus (P_t) konstruierte Halbgruppe (T_t) auf L^2 die folgende Eigenschaft $0 \leq T_t f \leq 1$ m -fast überall, falls $f \in L^2$ mit $0 \leq f \leq 1$ m -fast überall und $t \geq 0$.

c) Ist E ein topologischer Radon-Raum, so gilt folgende Umkehrung:

zu jeder Kontraktionshalbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ auf $L^2(E, \mathcal{B}, m)$ mit der Eigenschaft

$$0 \leq f \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq T_t f \leq 1 \quad (\forall f \in L^2, t \geq 0)$$

existiert eine Familie $(P_t)_{t \geq 0}$ von m -symmetrischen sub-Markov-Kernen derart, daß

$$P_t u \text{ ist Version von } T_t u$$

für alle $u \in L^2(E, \mathcal{B}, m) \cap \mathcal{B}_b$ und $t \geq 0$.

Die Familie $(P_t)_t$ bildet allerdings nicht notwendigerweise eine Halbgruppe.

Sei H ein beliebiger reeller Hilbert-Raum.

Satz 17.12. *Es gibt einen bijektiven Zusammenhang zwischen*

- *stark stetigen Kontraktionshalbgruppen $(T_t)_{t \geq 0}$ von symmetrischen Operatoren auf H .*

- *negativen selbstadjungierten Operatoren* $(A, \mathcal{D}(A))$ auf H
 (also: $\mathcal{D}(A) \subset H$ dicht, linear
 $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$ linear
 $(Au, u) \geq 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(A)$
 $(A^*, \mathcal{D}(A^*)) = (A, \mathcal{D}(A))$).
- *abgeschlossenen symmetrischen Formen* $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ auf H
 (also: $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset H$ dicht, linear
 $\mathcal{E} : \mathcal{D}(\mathcal{E}) \times \mathcal{D}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear
 $\mathcal{E}(u, u) \geq 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$
 $\mathcal{E}(u, v) = \mathcal{E}(v, u)$ für alle $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$).

Und zwar erhält man

- aus $(T_t)_t$ den Operator

$$A_u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t u - u)$$

mit $\mathcal{D}(A) = \{u \in H : \lim \dots \text{ existiert}\}$

und die Form

$$\mathcal{E}(u, u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t u - u, u)$$

mit $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{u \in H : \lim \dots \text{ existiert}\}$.

- aus $(A, \mathcal{D}(A))$ die Halbgruppe $T_t = e^{At}$ mit $\mathcal{D}(T_t) = H$ und die Form

$$\mathcal{E}(u, v) = (\sqrt{-A}u, \sqrt{-A}v),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\sqrt{-A}).$$

- aus $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ den Operator durch

$$(Au, v) = -\mathcal{E}(u, v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

und dann die Halbgruppe $T_t = e^{At}$.

Beweis: mit Spektralsatz, siehe Bücher über Funktionalanalysis, z.B. [Kato], [Read/Simon].

Beispiel 17.13. $(P_t)_t$ Brownsche Halbgruppe, $m =$ Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^d , $(T_t)_t$ Fortsetzung von $(P_t)_t$ auf $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$.
 $\Rightarrow A =$ Friedrichs-Fortsetzung von $\frac{1}{2}\Delta$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

für $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) = W^{1,2} = H^1$,
denn für $u, v \in \mathcal{C}_{\text{komp.}}^2(\mathbb{R}^1)$:

$$\frac{1}{2} \int \nabla u \nabla v dx = -\frac{1}{2} \int \Delta u \cdot v dx = -(Au, v).$$

Satz 17.14. Äquivalent sind

(i) Für die stark stetige Kontraktionshalbgruppe (T_t) gilt:

$$0 \leq f \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq T_t f \leq 1.$$

(ii) Für die abgeschlossene symmetrische Form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ gilt:
Für alle $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist

$$u^\# := (u \wedge 1) \vee 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

und $\mathcal{E}(u^\#, u^\#) \leq \mathcal{E}(u, u)$

(“Beurling-Deny-Bedingung“),
m. a. W.: $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ ist Dirichlet-Form.