

Anton Bovier

Mathematik für Physiker II

Vorlesungsskript, Uni Bonn, Sommersemester
2011

3. Juli 2012

IAM, Uni Bonn

Inhaltsverzeichnis

1	Integrale und Maße	1
1.1	Riemann Integration	1
1.2	Lebesgue Integration	3
1.2.1	Das Lebesgue Maß.	4
1.2.2	Das Lebesgue Integral.	6
1.2.3	Funktionen und Maße	11
1.3	Hilberträume	13
1.4	Mehrdimensional Integration	16
1.4.1	Mehrfachintegrale.	17
1.4.2	Transformationsatz	20
2	Kurvenintegrale	27
2.1	Kurven im \mathbb{R}^d	27
2.2	Differentialformen	29
2.3	Integrale längs einer Kurve	30
2.4	Energie und Hamilton'sche Gleichungen	32
3	Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten	33
3.1	Mannigfaltigkeiten	33
3.2	Differential-2-Formen und Flächenintegrale	34
3.2.1	Differential-2-Formen	34
3.2.2	Differential-2-Formen.	37
3.2.3	Flächeninhalt und Integration	38
3.2.4	Der Satz von Stokes	42
3.3	k -Formen und Integrale über Mannigfaltigkeiten	46
3.3.1	k -Formen.	46
3.3.2	Differential- k -Formen.	47
3.3.3	Integration von k -Formen.	47
3.3.4	Der Satz von Stokes	48
3.3.5	Der Satz von Gauss.	49

4 Hilberträume, Basen, Fouriertransformation	53
4.1 Hilberträume	53
4.1.1 Basen	55
4.1.2 Fourierreihen	56
4.1.3 Anwendung. Lineare Differentialgleichung	60
4.2 Fouriertransformation	70
4.2.1 Definition und Eigenschaften	71
4.2.2 Die Inversionsformel	72
4.2.3 Anwendung auf Differentialgleichungen	74
Literaturverzeichnis	75
Sachverzeichnis	77

Kapitel 1

Integrale und Maße

1.1 Riemann Integration

Wir wiederholen zunächst die wesentlichen Konzepte der Integration von Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$. Das *Riemann Integral* von f über I ist dann wie folgt definiert:

Definition 1.1. Sei f eine reellwertige Funktion, die auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Sei $I_i^{(n)}, i = 1, \dots, n$, eine Folge von Zerlegungen von I in n Teilintervalle mit der Eigenschaft, dass $\lim_{n \uparrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} |I_i^{(n)}| = 0$. Dann heißt f Riemann-integrierbar über I , wenn

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^n |I_i^{(n)}| \inf_{y \in I_i^{(n)}} f(y) = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^n |I_i^{(n)}| \sup_{y \in I_i^{(n)}} f(y). \quad (1.1.1)$$

In diesem Fall heißt der Grenzwert das *Riemann Integral* von f über I und wird mit $\int_I f(x) dx$ bezeichnet.

Erfreulicherweise sind viele Funktionen Riemann-integrierbar. Es gilt:

Theorem 1.2. Wenn f auf dem kompakten Intervall I stetig ist, so ist f über I Riemann-integrierbar.

Natürlich ist die Stetigkeit nicht notwendig für die Integrierbarkeit. So sind zum Beispiel auch alle Stufenfunktionen (mit endlich vielen Stufen) Riemann-integrierbar. Generell sind stückweise stetige Funktionen Riemann integrierbar, man kann sogar zeigen dass eine Funktion f genau dann Riemann integrierbar über I ist, wenn sie beschränkt und "fast überall" stetig ist.

Wenn eine Funktion Riemann-integrierbar ist konvergiert offenbar auch jede Summe $\sum_{i=1}^n f(\xi_i^n) |I_i^{(n)}|$ für irgendeine Wahl von Punkten $\xi_i^n \in I_i^{(n)}$. Daher kann man einfache Partitionen verwenden und z.B. für ξ_i^n einen Randpunkt des Intervalls

$I_i^{(n)}$ nehmen. Man kann aber nicht-stetige Funktionen finden, für die man bei geeigneter Wahl der Partition und der Punkte ξ_i^n Grenzwerte für die obige Summe erhält, die aber von der speziellen Wahl dieser Punkte abhängen.

Das Riemann Integral hat eine kanonische *geometrische* Interpretation: wenn f positiv und Riemann-integrierbar ist, so stellt $\int_I f(x)dx$ den Flächeninhalt zwischen dem Intervall I und der Kurve $f(x), x \in I$, dar.

Für alle praktischen Zwecke fundamental ist aber der Zusammenhang zwischen Riemann Integral und der Differentiation. Es gilt nämlich der folgende *Hauptsatz der Analysis*:

Theorem 1.3. *Sei für alle x in einem offenen Intervall $O \subset \mathbb{R}$ eine Funktion f Riemann-integrierbar für alle Intervalle $[a, x]$. Sei*

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy \equiv \int_{[a,x]} f(y)dy. \quad (1.1.2)$$

Dann gilt: $F(x)$ ist differenzierbar in O , und für alle $x \in O$ gilt, für alle Punkte x in denen f stetig ist,

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1.3)$$

Umgekehrt gilt: wenn für alle $x \in I = [a, b]$ F eine differenzierbare Funktion ist und es gilt $F'(x) = f(x)$, dann ist f Riemann-integrierbar über I und es gilt für alle $x \in [a, b]$, dass $F(x) - F(a) = \int_a^x f(y)dy$.

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$h^{-1}(F(x+h) - F(x)) = \lim_{n \uparrow \infty} h^{-1} n^{-1} \sum_{i=0}^{[hn]-1} f(x+i/n) \leq \sup_{y \in [x, x+h]} f(y) \quad (1.1.4)$$

und ebenso

$$h^{-1}(F(x+h) - F(x)) \geq \inf_{y \in [x, x+h]} f(y) \quad (1.1.5)$$

Da f bei x stetig ist, gilt aber

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{y \in [x, x+h]} f(y) = f(x), \quad (1.1.6)$$

sowie dieselbe Aussage für das Infimum. Da dasselbe auch für $F(x) - F(x-h)$ gilt, erhalten wir die erste Aussage des Satzes. Die Aussage des zweiten Satzes ist eine Übung. Benutze dazu eine teleskopische Zerlegung von $F(b) - F(a)$ und die Konvergenz der Differentialquotienten. \square

Der Hauptsatz der Analysis hat zwei Anwendungen: Zum einen erlaubt er uns in (einigen) Fällen bestimmte Integrale auszurechnen, indem wir die Stammfunktion "erraten". Dazu gibt es etliche Tricks, insbesondere die *partielle Integration* und die *Substitution*. Die partielle Integration besagt, dass, wenn f und g differenzierbare Funktionen sind,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'(x)f(x)dx \quad (1.1.7)$$

gilt. Diese Formel geht auf die Produktregel der Differentiation und die einfache Beobachtung zurück, dass

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

gilt. Die Substitutionsregel leitet sich aus der Kettenregel der Differentiation, $\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$, ab. Integrieren wir nämlich diese Gleichung und verwenden wieder den Hauptsatz, erhalten wir,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \quad (1.1.9)$$

Fast wichtiger ist der zweite Gesichtspunkt des Hauptsatzes: die Darstellung einer Stammfunktion als Riemann Integral erlaubt eine approximative numerische Berechnung von Stammfunktionen auch in Fällen, in denen wir keine "explizite" Stammfunktion analytisch berechnen können. Dazu wird eine geschickte Darstellung der Riemann'schen Summen gewählt, wobei sowohl die Wahl der Zerlegungen des Intervalls also auch die Wahl eines optimalen Wertes zwischen inf und sup die Konvergenz des Algorithmus beeinflussen können.

1.2 Lebesgue Integration

Aus einer Reihe von Gründen, die wir hoffentlich im Laufe der Zeit einsehen werden, möchte man den Integralbegriff erweitern. Eine erste Motivation mag sein, dass wir die Einschränkung auf (im wesentlichen) stetige Funktionen als Integranden und endliche Intervalle als Integrationsgebiete als zu restriktiv erfahren.

Die wesentliche Idee des Riemann Integrals ist die Approximation des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Funktion dadurch zu erreichen, dass man den Integrationsbereich partitioniert und dann die Fläche durch daraus entstehende Rechtecke annähert. Die neue Idee des *Lebesgue Integrals* ist es nun, diese Partitionierung stattdessen im *Wertebereich* der Funktion vorzunehmen. Sei zunächst f eine positive Funktion auf \mathbb{R} . Wir wählen nun ein $\varepsilon > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge von \mathbb{R} (insbesondere muss Ω nicht kompakt sein). Wir setzen

$$D_\varepsilon(i) \equiv \{x \in \Omega : f(x) \in (i\varepsilon, (i+1)\varepsilon]\}. \quad (1.2.1)$$

Nehmen wir an, dass wir die Volumina der Mengen $D_\varepsilon(i)$ kennen. Wir bezeichnen diese mit $\ell(D_\varepsilon(i))$. Dann haben wir für den Flächeninhalt unter f über Ω die unteren

bzw. oberen Schranken

$$L_\varepsilon \equiv \sum_{i=0}^{\infty} i\varepsilon \ell(D_\varepsilon(i)) \quad (1.2.2)$$

bzw.

$$U_\varepsilon \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\varepsilon \ell(D_\varepsilon(i)). \quad (1.2.3)$$

Wir sehen sofort, dass $U_\varepsilon - L_\varepsilon \leq \varepsilon \ell(x \in \Omega : f(x) > 0)$. Wenn also das Volumen der Menge auf der f strikt positiv ist, endlich ist, dann konvergiert die Differenz zwischen oberer und unterer Schranke gegen 0, wenn ε gegen 0 strebt, und der Grenzwert (der möglicherweise $+\infty$ ist) stellt den gesuchten Flächeninhalt dar. Das Schöne daran ist, dass die einzige Anforderung an f die ist, dass wir den Mengen $D_\varepsilon(i)$ ein Volumen zuordnen können müssen. Solche Funktionen nennt man *messbar*. Um dies besser verstehen zu können, müssen wir etwas ausholen.

1.2.1 Das Lebesgue Maß.

Wir müssen uns nun etwas detaillierter mit der Frage beschäftigen, wie wir Teilmengen von \mathbb{R} ein Volumen zuordnen. Zunächst ist klar, dass jedes Intervall $[a, b]$ gerade seine Länge als Volumen bekommen soll. Es ist also $\ell([a, b]) = b - a$. Ferner soll ein einzelner Punkt das Volumen 0 bekommen. Damit ist aber schon alles festgelegt. Denn natürlicherweise müssen Volumen Additivitätsbedingungen erfüllen:

- (i) Das Volumen der leeren Menge ist 0.
- (ii) Sei I_1, I_2, \dots eine Folge von disjunkten Teilmengen, dann gilt

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i). \quad (1.2.4)$$

Wichtig ist hier, dass wir immer die Konvention beachten, dass auch eine unendliche Summe von Nullen gleich Null ist.

Man kann beweisen, dass diese Bedingungen ausreichen, um die Volumina einer enorm grossen Klasse von Mengen, der sogenannten *Borel sigma-Algebra* von \mathbb{R} , festzulegen. Diese Klasse ist wie folgt festgelegt:

Definition 1.4. Die Borel sigma-Algebra von \mathbb{R} , $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ist wie folgt charakterisiert:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R});$
- (ii) Alle offenen Intervalle (a, b) sind Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R});$
- (iii) Wenn $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann ist auch $A^c \equiv \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});$
- (iv) Wenn $A_i, i \in \mathbb{N}$ eine Folge disjunkter Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, so ist auch die unendliche Vereinigung, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$

Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nennt man auch Borel-Mengen.

Bemerkung. Statt alle offenen Intervalle kann man auch alle abgeschlossenen Intervalle einfordern. Auch sind automatisch auch alle abzählbaren Durchschnitte in der sigma Algebra, da ja $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ gilt.

Eine nicht-negative Funktion, die jedem Elemente einer sigma-Algebra einen Wert zuordnet und die die Additivitätseigenschaften (i) und (ii) oben erfüllt, nennt man ein Maß. Man kann zeigen, dass ein eindeutiges Maß mit der Eigenschaft $\ell([a, b]) = b - a$ existiert. Es wird als *Lebesgue Maß* bezeichnet.

Bemerkung. Man sollte wissen, dass nicht alle Teilmengen von \mathbb{R} Elemente der Borel sigma-Algebra sind. Allerdings sind dies recht seltsame Mengen, die in der Praxis keine Rolle spielen. Das bekannteste Beispiel einer solchen Menge wird wie folgt konstruiert: Wir sagen, dass zwei reelle Zahlen äquivalent sind, wenn sie sich um eine rationale Zahl unterscheiden. Damit können wir die reellen Zahlen in Äquivalenzklassen zerlegen. Nun wähle man aus jeder Klasse einen Vertreter im Intervall $[0, 1]$. Die Vereinigung dieser Vertreter sei A . Dann kann jede reelle Zahl als Summe eines Elements von A und einer rationalen Zahl geschrieben werden. Die Menge A ist nicht Borel'sch. In der Tat findet man, dass man ihr weder das Volumen 0 noch ein endliches Volumen zuordnen kann, ohne einen Widerspruch zu produzieren.

1.2.1.1 Nullmengen.

Es ist wichtig zu wissen, dass es viele, auch sehr komplizierte Mengen gibt, deren Lebesgue Maß Null ist. Das sind zunächst einmal abzählbare Mengen von Punkten, wie etwa die rationalen Zahlen.

Ein interessanteres Beispiel sind manche *Fraktale*, wie etwa die klassische *Cantormenge*: Man nehme das Intervall $[0, 1]$ und zerteile es in drei gleiche Teile. Nun entferne man das mittlere Stück, das offene Intervall $(1/3, 2/3)$. Dann wiederhole man dieselbe Prozedur mit den verbliebenen Dritteln und iteriere dies unendlich oft. Man kann sich leicht überlegen, dass die verbleibende Menge nicht leer ist (z.B. werden die Punkte 0 und 1 sicher nie entfernt), und dass sie Element der Borel sigma-Algebra ist. Ihr Volumen ist dann gleich 1 minus dem Volumen der herausgenommenen Teile. Letzteres ist aber

$$\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} 2^{i-1} = 3^{-1} \frac{1}{1 - 2/3} = 1. \quad (1.2.5)$$

Also hat die klassische Cantormenge Lebesgue-Maß Null.

Allgemeiner nennt man eine Menge eine Cantormenge, wenn sie abgeschlossen ist, keine isolierten Punkte und keine offene Mengen enthält. Man kann auch Cantormengen konstruieren, die positives Lebesguemaß haben. Z.B. kann man in der obigen Konstruktion im i -ten Schritt immer kleinere Intervalle herausnehmen, etwa der Länge 3^{-2i+1} statt 3^{-i} .

1.2.2 Das Lebesgue Integral.

1.2.2.1 Messbare Funktionen.

Wir können jetzt die Frage nach der Messbarkeit von Funktionen genauer stellen. Ganz offenbar muss für die Konstruktion der Schranken (1.2.1) und (1.2.2) gelten, dass alle auftretenden Mengen $D_\varepsilon(i)$ Borel-Mengen sind. Man kann das auch eleganter so ausdrücken: Eine reellwertige Funktion auf den reellen Zahlen ist messbar, wenn die Urbilder von Borel-Mengen selbst Borel-Mengen sind. In der Praxis kommt es fast nie vor, dass eine Funktion nicht messbar ist. Insbesondere sind alle stetigen Funktionen und sogar alle Funktionen, die als gleichmäßig Grenzwerte von stetigen Funktionen erhalten werden, messbar.

Für messbare Funktionen, die nur auf einer Menge von endlichem Volumen von Null verschieden sind, bietet es sich offenbar an, den Grenzwert für $\varepsilon \downarrow 0$ von (1.2.1) als Integral zu definieren. Noch praktischer ist aber die folgende Definition, die gleich den allgemeinsten Fall abdeckt.

Wir definieren dazu zunächst für jede Borel Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die *Indikatorfunktion*,

$$\mathbb{1}_B(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Die einzig sinnvolle Definition des Integrals einer Indikatorfunktion ist

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x) dx = \ell(B). \quad (1.2.7)$$

Damit definieren wir die Klasse der *einfachen Funktionen*, $E(\mathbb{R})$, als die Menge aller Funktionen der Form

$$h(x) = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{B_i}(x), \quad (1.2.8)$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}_+$ und $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Familie von disjunkten Mengen.

Klar sind alle einfachen Funktionen messbar (sie wären das nicht, wenn man B_i 's zuliesse, die keine Borelmengen sind).

Ebenfalls klar ist, was das Integral einer einfachen Funktion sein muss: Für h in (1.2.8) gilt (Linearität):

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_i}(x) = \sum_{i=1}^k a_i \ell(B_i). \quad (1.2.9)$$

Nun kommt eine geniale Definition:

Definition 1.5. Sei f eine messbare positive Funktion. Dann existiert das Lebesgue Integral (mit möglichem Wert $+\infty$) und ist gegeben durch

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \equiv \sup_{h \in E(\mathbb{R}): h(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x). \quad (1.2.10)$$

Durch die Definition mit sup statt einem Grenzwert erledigt sich die Frage nach der Existenz. Einen sup gibt es immer. Positive messbare Funktionen sind also immer integrierbar, wobei auch unendlich herauskommen kann. Das macht auch Sinn, denn wir wollen schon sagen können, was der Flächeninhalt unter einer (fast) beliebigen Kurve ist.

Wenn wir statt über \mathbb{R} über eine Menge Ω integrieren wollen, müssen wir nur $f(x)$ durch $f(x) \mathbb{1}_{\Omega}(x)$ ersetzen:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\Omega}(x) f(x) dx. \quad (1.2.11)$$

Schliesslich definieren wir das Integral allgemeiner messbarer Funktionen, indem wir diese in einen positiven und negativen Teil aufspalten. Wir setzen

$$f^{\pm}(x) = \pm f(x) \mathbb{1}_{\pm f(x) > 0}. \quad (1.2.12)$$

Definition 1.6. Eine messbare Funktion f ist Lebesgue integrierbar, genau dann, wenn entweder $\int f^+(x) dx < \infty$ oder $\int f^-(x) dx < \infty$. In diesem Fall ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) dx. \quad (1.2.13)$$

Beachte, dass die Werte $\pm\infty$ zugelassen sind, nicht aber der unbestimmte Wert $\infty - \infty$.

Man kann leicht zeigen, dass unser neues Integral mit dem Riemann'schen Integral übereinstimmt, wenn eine Funktion Riemann-integrierbar ist. Dies muss natürlich auch der Fall sein, da sonst in einer der Definition die Interpretation als Flächeninhalt verloren sein müsste. Damit haben wir weiter die bekannten Methoden zur Berechnung von Integralen im Falle stetiger Funktionen zur Verfügung.

Das Lebesgue Integral besitzt aber eine Reihe von Eigenschaften, die es sehr angenehm manipulierbar machen. Wir haben bereits gesehen, dass seine Existenz für eine sehr natürliche Funktionenklasse gesichert ist.

Aus theoretischer Sicht ganz fundamental ist der *Satz von der monotonen Konvergenz*.

Theorem 1.7. Sei f_n eine monoton wachsende Folge positiver messbarer Funktionen, die punktweise gegen einen Grenzwert f strebt. Dann gilt

$$\lim_{n \uparrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx. \quad (1.2.14)$$

Beweis. Der Beweis zeigt wie geschickt die Definition des Lebesgue Integrals war. Es ist klar, dass

$$\int f_k(x) dx \leq \int f(x) dx, \quad (1.2.15)$$

und damit auch $\lim_{k \uparrow \infty} \int f_k(x) dx \leq \int f(x) dx$. Wir müssen nur die umgekehrte Ungleichung beweisen. Für beliebiges positives $h \in E(\mathbb{R})$ mit $h \leq f$ und $a < 1$ wollen wir zunächst zeigen, dass für hinreichend grosses k ,

$$\int f_k(x) dx \geq a \int h(x) dx.$$

Sei $h = \sum_{i=1}^m h_i \mathbb{I}_{A_i}$. Sei I_n die Menge

$$I_n \equiv \{x \in \mathbb{R} : ah(x) \leq f_n(x)\}.$$

Dann ist I_n messbar, und da $a < 1$, und $f_n \uparrow f$, muss die Folge I_n wachsend sein und $\mathbb{R} = \cup_n I_n$. Wir setzen

$$h_n(x) = ah(x) \mathbb{I}_{I_n}(x).$$

Dann ist $h_n \leq f_n$. Also ist

$$\int f_n(x) dx \equiv \sup_{g \leq f_n, g \in E(\mathbb{R})} \int g(x) dx \geq \int h_n(x) dx = a \sum_{i=1}^m h_i \ell(A_i \cap I_n).$$

Da nun aber $I_n \uparrow \mathbb{R}$, gilt auch $A_i \cap I_n \uparrow A_i$, wenn $n \uparrow \infty$ und somit auch $\ell(A_i \cap I_n) \uparrow \ell(A_i)$. Also ist

$$\lim_{n \uparrow \infty} \int f_n(x) dx \geq a \sum_{i=1}^m h_i \ell(A_i) = a \int h(x) dx.$$

Da letzteres für jedes $a < 1$ und $h \in E(\mathbb{R}), h \leq f$ gilt, ist auch

$$\lim_{n \uparrow \infty} \int f_n(x) dx \geq \sup_{a < 1} \sup_{h \in E(\mathbb{R}), h \leq f} a \int h(x) dx = \sup_{a < 1} a \int f(x) dx = \int f(x) dx. \quad (1.2.16)$$

Hieraus folgt mit (1.2.15) die Behauptung sofort. \square

Dieser Satz ist die wichtigste Grundlage für Beweise von anderen strukturellen Aussagen über Integrale. Die Beweisstrategien sind dabei immer die gleichen: 1) zeige eine Aussage für Indikatorfunktionen, 2) benutze die Linearität um dieselbe Aussage für einfache Funktionen zu zeigen, 3) approximiere allgemeine Funktionen monoton durch Folgen von einfachen Funktionen und benutze den Satz von der monotonen Konvergenz.

Die zwei folgenden Eigenschaften des Integrals werden immer wieder benötigt:

Der erste ist das sogenannte *Fatou'sche Lemma*:

Lemma 1.8. *Sei f_n eine Folge positiver messbarer Funktionen. Dann gilt*

$$\int \liminf_n f_n(x) dx \leq \liminf_n \int f_n(x) dx. \quad (1.2.17)$$

Der zweite zentrale Satz ist Lebesgue's Satz von der dominierten (oder majorierten) Konvergenz.

Wir sagen, dass eine Folge von Funktionen f_n *fast überall* gegen eine Funktion f konvergiert, wenn

$$\ell\left(\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \uparrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}\right) = 0. \quad (1.2.18)$$

Theorem 1.9. Sei f_n eine Folge von absolut integrierbaren Funktionen, die fast überall gegen eine messbare Funktion f strebt. Sei ferner $g \geq 0$ eine positive Funktion mit der Eigenschaft, dass $\int g(x)dx < \infty$, so dass

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ fast überall.} \quad (1.2.19)$$

Dann ist f absolut integrierbar und

$$\lim_{n \uparrow \infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx. \quad (1.2.20)$$

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist die Leibniz Regel, die das differenzieren unter dem Integral regelt.

Korollar 1.10. Sei I ein Intervall und $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen an, das

- (i) Für jedes $t \in I$ ist $f(\cdot, t)$ eine messbare Funktion und $\int |f(x, t)|dx < \infty$;
- (ii) Für (fast) jedes x ist $f(x, \cdot)$ eine differenzierbar in I .
- (iii) Es gilt, dass $\int \sup_{t \in I} \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| dx < \infty$.

Dann gilt:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)dx = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x, t)dx. \quad (1.2.21)$$

Beweis. Der Beweis benutzt den Satz von der dominierten Konvergenz. Es ist ja $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \lim_{n \uparrow \infty} n(f(x, t + 1/n) - f(x, t))$. Setzen wir daher $h_n(x, t) \equiv n(f(x, t + 1/n) - f(x, t))$ für die Folge der Differenzenquotienten, so lässt sich die Schlussfolgerung des Korollars schreiben als

$$\int \lim_{n \uparrow \infty} h_n(x, t)dx = \lim_{n \uparrow \infty} \left(\int f(x, t + 1/n)dx - \int f(x, t)dx \right). \quad (1.2.22)$$

Nun ist zunächst wegen der Linearität des Integrals und der integrierbarkeit der Funktionen f gemäss (i),

$$n \left(\int f(x, t + 1/n)dx - \int f(x, t)dx \right) = \int h_n(x, t)dx. \quad (1.2.23)$$

Daher folgt in der Tat (1.2.21) sofern wir zeigen können, dass

$$\int \lim_{n \uparrow \infty} h_n(x, t)dx = \lim_{n \uparrow \infty} \int h_n(x, t)dx. \quad (1.2.24)$$

Dazu können wir jetzt (iii) heranziehen, um eine Majorante $g(x)$ zu konstruieren. Dazu benutzen wir, dass nach dem Mittelwertsatz stets ein $\varepsilon \in [0, 1/n]$ existiert, so dass $n[f(x, t + 1/n) - f(x, t)] = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t + \varepsilon)$. Insbesondere ist dann

$$|h_n(x, t)| \leq \sup_{t \in I} \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t + \varepsilon) \right| \equiv g(x). \quad (1.2.25)$$

Nach Voraussetzung ist aber $g(x)$ integrierbar und somit kann der Satz von der dominierten Konvergenz benutzt werden um (1.2.24) zu beweisen. Damit ist das Korollar gezeigt. \square

Beispiel. Der vorhergehende Satz hat sehr viele wichtige Anwendungen zur Berechnung von Integralen. Hier ist ein wichtiges Beispiel. Angenommen wir wollen die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-x^2/2) dx$$

berechnen. Dann können wir wie folgt vorgehen. Zunächst beobachten wir, dass folgende Formel gilt:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(-tx^2/2) = (-1/2)^n x^{2n} \exp(-tx^2/2),$$

also

$$\int x^{2n} \exp(-tx^2/2) dx = (-2)^n \int \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(-tx^2/2) dx.$$

Wenn wir also Differentiation und Integration (n mal) vertauschen können, dann ist

$$\int x^{2n} \exp(-tx^2/2) dx = (-2)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int \exp(-tx^2/2) dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nach der Substitutionsregel

$$\int \exp(-tx^2/2) dx = t^{-1/2} \int \exp(-x^2/2) dx$$

Das von t unabhängige Integral ist eine Konstante, und zwar $\sqrt{2\pi}$ (das zeigen wir später, ist hier aber nicht wichtig). Dann ist nach einer einfachen Rechnung

$$(-2)^n \int \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(-tx^2/2) dx = \sqrt{2\pi} t^{-(n+1/2)} (2n-1)!!.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass in einem Intervall, das die 1 enthält (z.B. $[1/2, 3/2]$),

$$\sup_{t \in [1/2, 3/2]} \left| \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(-tx^2/2) \right|$$

integrierbar mit endlichem Integral ist. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [1/2, 3/3]} \left| \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(-tx^2/2) \right| &= 2^{-n} \sup_{t \in [1/2, 3/3]} |x^{2n} \exp(-tx^2/2)| \\ &= 2^{-n} x^{2n} \exp(-x^2/4), \end{aligned}$$

und das Integral dieser Funktion ist endlich. Damit haben wir die Formel

$$\int x^{2n} \exp(x^2/2) = \sqrt{2\pi}(2n-1)!! \quad (1.2.26)$$

gezeigt.

1.2.3 Funktionen und Maße

Es wird sich als sehr nützlich erweisen, den Begriff des Maßes weiter zu fassen, als wir das bisher getan haben. Das Lebesgue Maß ist oben im Sinne der natürlichen "Länge" von Teilmengen eingeführt worden. Physikalisch kann aber auch ein anderer Maßbegriff sinnvoll sein. Wenn wir z.B. an einen Stab mit inhomogener Dichte denken, so wäre vielleicht das Gewicht eines Teils des Stabes die interessante Größe.

Eine Möglichkeit solche neuen Maße zu definieren besteht darin, eine nicht-negative, messbare Funktion $\rho(x)$ zu nehmen und dann die Maße einer (Borel) Menge, B , zu definieren als

$$\mu(B) \equiv \int \mathbb{1}_B(x) \rho(x) dx. \quad (1.2.27)$$

Man kann leicht nachprüfen, dass ein so definiertes Maß die Additivitätseigenschaften (i) und (ii) in der Definition des Lebesgue Maßes

weiter erfüllt; nur die Eigenschaft, dass das Maß eines Intervalles seine Länge ist, gilt nun nicht mehr.

Dagegen beobachten wir, dass wir mittels eines solchen Maßes eine Funktion F definieren können durch

$$F(x) - F(0) = \int_0^x \rho(x) dx. \quad (1.2.28)$$

Die Funktion F ist eindeutig bis auf eine Konstante. Sie hat die offensichtlichen Eigenschaften:

- (i) F ist nicht-fallend.
- (ii) Wenn ρ Riemann-integrierbar ist, dann ist F differenzierbar und ist eine Stammfunktion von ρ , d.h. es gilt $F'(x) = \rho(x)$.

Wir schreiben gerne auch:

$$\mu(B) \equiv \int_B \mu(dx) \equiv \int_B dF(x). \quad (1.2.29)$$

Die Funktion ρ heisst *Dichte* des Maßes μ .

Ein grosser Vorteil dieser Betrachtungsweise ist, dass wir auch Maße betrachten können, für die es gar keine Dichte gibt. Das erlaubt es z.B. Massenverteilungen zu betrachten, die etwa eine Wolke von Atomen beschreiben. Der einfachste Fall ist, dass eine Masse 1 an einem gegebenen Ort $y \in \mathbb{R}$ liegt. Das zugehörige Maß bezeichnet man als Dirac Maß und notiert es als δ_y . Es hat die Eigenschaft, dass für jede Borel Menge, B , gilt, dass

$$\int_B \delta_y(dx) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.2.30)$$

Eine Wolke von Atomen wird dann etwa durch ein Maß

$$\mu = \sum_{i=1}^N m_i \delta_{x_i} \quad (1.2.31)$$

beschrieben.

Wichtig ist, dass Folgen verschiedener Sorten von Maßen gegen Grenzwerte konvergieren können, die von anderer Form sind. Betrachten wir z.B. die Folge von Funktionen

$$\rho_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-n \frac{(x-y)^2}{2}\right). \quad (1.2.32)$$

Klarerweise hat diese Folge keinen guten Grenzwert als Funktion: Für $x = y$ ist der Limes gleich unendlich, während er für alle anderen Werte von x gleich Null ist. Betrachten wir dagegen die Folge der Maße μ_n mit Dichtefunktion ρ_n , so kann man sich schnell davon überzeugen, dass diese Folge einen Grenzwert hat, und zwar das Dirac Maß δ_y . Hierbei soll "Konvergenz" bedeuten, dass für alle *offenen* Teilmengen $O \subset \mathbb{R}$, $\int_O \rho_n(x) dx \rightarrow \int_O \delta_y(dx)$ gilt.

Bemerkung. Besonders in der physikalischen Literatur wird gerne davon gesprochen, dass ρ_n gegen die *Dirac Funktion* $\delta(x-y)$ konvergiert. Diese wird dann wie die Dichte des Dirac Maßes behandelt, d.h. man schreibt $\delta_y(dx) = \delta(y-x)dx$. "Funktionen" dieser Art werden als *verallgemeinerte Funktionen* bezeichnet.

Umgekehrt können auch atomische Maße gegen Maße mit Dichten konvergieren. Betrachte z.B. die Folge der Maße

$$\mu_n(dx) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{i/n}. \quad (1.2.33)$$

Man sieht sofort, dass für jedes Teilintervall $I \subset [0, 1]$,

$$\lim_{n \uparrow \infty} \mu_n(I) = \ell(I); \quad (1.2.34)$$

Somit erfüllte das Grenzmass die Eigenschaft des auf $[0, 1]$ eingeschränkten Lebesgue Maßes. Man sieht damit, dass es sinnvoll sein kann, die Verteilung einer grossen Anzahl von Atomen durch eine Dichtefunktion zu approximieren.

1.3 Hilberträume

Eine wichtige Rolle spielen in der Quantentheorie Vektorräume von Funktionen. Wir können das recht allgemein formulieren. Sei μ ein Maß (zunächst auf den reellen Zahlen), so sagen wir dass eine Funktion f *quadratintegrierbar* ist, falls

$$\int |f(x)|^2 \mu(dx) < \infty. \quad (1.3.1)$$

Wir nennen die Menge aller quadratintegrierbaren Funktionen bezüglich eines Maßes μ $L^2(\mu)$.

Wir zeigen zunächst:

Theorem 1.11. *Sei μ ein Maß. Dann ist der Raum $L^2(\mu)$ ein Vektorraum bezüglich der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen.*

Beweis. Wir müssen folgendes zeigen: Falls $f, g \in L^2(\mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; dann ist auch $\alpha f + \beta g \in L^2(\mu)$. Nun gilt aber

$$\int |\alpha f(x) + \beta g(x)|^2 \mu(dx) \leq 2\alpha^2 \int |f(x)|^2 \mu(dx) + 2\beta^2 \int |g(x)|^2 \mu(dx). \quad (1.3.2)$$

Dies folgt aus der elementaren Ungleichung

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 + 2ab \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a-b)^2 \\ &\leq 2a^2 + 2b^2. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Da nach Voraussetzung die rechte Seite von (1.3.2) endlich ist, haben wir gezeigt was wir zeigen wollten. \square

Beispiel 1: Sei $\mu(dx) = dx$. Dann sind z.B. alle Funktionen der Form $f_n(x) = x^n \exp(-x^2)$ Elemente von $L^2(dx)$. Die Funktionen f_n sind alle linear unabhängig. Daher gilt, dass der Raum $L^2(dx)$ *unendlich dimensional* ist.

Beispiel 2: Sei $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$. Dann sind z.B. alle Funktionen der Form $g_n(x) = x^n$ Elemente des Raumes $L^2(\mu)$. Auch dieser Raum ist offenbar unendlich dimensional.

Den Vektorraum $L^2(\mu)$ können wir nun mit einem Skalarprodukt ausstatten. Dazu definieren wir

$$\langle f, g \rangle_\mu \equiv \int f(x)g(x)\mu(dx). \quad (1.3.4)$$

Wir zeigen, dass diese Definition in der Tat ein Skalarprodukt definiert:

(0) Für alle $f, g \in L^2(\mu)$ gilt $\langle f, g \rangle_\mu = \langle g, f \rangle_\mu$;

(i) Für alle $f \in L^2(\mu)$ gilt $\langle f, f \rangle_\mu \geq 0$;

(ii) Für $f, g, h \in L^2(\mu)$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \alpha f, (\beta g + \gamma h) \rangle_\mu = \alpha\beta \langle f, g \rangle_\mu + \alpha\gamma \langle f, h \rangle_\mu. \quad (1.3.5)$$

Hierbei folgt Punkt (i) aus der Linearität des Integrals.

Natürlich gilt auch die *Cauchy-Schwartz Ungleichung*: für alle $f, g \in L^2(\mu)$ gilt:

$$\langle f, g \rangle_\mu^2 \leq \|f\|_{2,\mu}^2 \|g\|_{2,\mu}^2. \quad (1.3.6)$$

(1.3.6) folgt aus der elementaren Ungleichung $2|ab| \leq a^2 + b^2$. Offenbar ist nämlich (1.3.6) äquivalent zu

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_\mu^2 \leq 1, \quad (1.3.7)$$

wobei $\hat{f}(x) \equiv f(x)/\|f\|_{2,\mu}$, $\hat{g}(x) \equiv g(x)/\|g\|_{2,\mu}$ gesetzt ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_\mu^2 &\leq \left(\int |\hat{f}(x)\hat{g}(x)|\mu(dx) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\int \hat{f}(x)^2\mu(dx) + \int \hat{g}(x)^2\mu(dx) \right)^2 = 1, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

genau wie wir es brauchen.

Mit dem Skalarprodukt definiert man eine *Norm* auf dem Raum $L^2(\mu)$ durch

$$\|f\|_{2,\mu} \equiv \sqrt{\langle f, f \rangle_\mu}. \quad (1.3.9)$$

Diese Definition ist konsistent, da $\|\cdot\|_{2,\mu}$ die Eigenschaft einer Norm erfüllt:

- (o) Für alle $f \in L^2(\mu)$ gilt $\|f\|_{2,\mu} \geq 0$;
- (i) Für $f \in L^2(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, gilt $\|\alpha f\|_{2,\mu} = |\alpha| \|f\|_{2,\mu}$;
- (ii) Für $f, g \in L^2(\mu)$ gilt $\|f+g\|_{2,\mu} \leq \|f\|_{2,\mu} + \|g\|_{2,\mu}$;
- (iii) $\|f\|_{2,\mu} = 0$ genau dann, wenn $f = 0$;

Genau genommen gilt Bedingung (iii) nicht, da wir nur schliessen können, dass $f(x) = 0$ für μ -fast alle x . Wenn zum Beispiel $\mu(dx) = dx$, und f definiert ist durch $f(x) = 0$ für alle irrationalen Zahlen, dann ist trotzdem $\|f\|_{2,\mu} = 0$. Solange wir es mit "vernünftigen" Funktionen zu tun haben, können wir diese Subtilität ignorieren. Um mathematisch genau zu sein, interpretiert man $L^2(\mu)$ als Raum der Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf Null-Mengen unterscheiden.

Der mit diesem Skalarprodukt ausgestattete Raum $L^2(\mu)$ erfüllt die Eigenschaften eines sogenannten *Hilbertraums*. Er ist eine *unendlichdimensionale* Version eines Euklidischen Raumes.

Zwei von Null verschiedene Elemente von $L^2(\mu)$ heissen *orthogonal*, wenn $\langle f, g \rangle_\mu = 0$. Wenn darüber hinaus gilt, dass $\|f\|_{2,\mu} = \|g\|_{2,\mu} = 1$, so heissen sie *orthonormal*.

Für praktische Zwecke ist es sehr oft wichtig, aus gegebenen linear unabhängigen Elementen, f_1, f_2, \dots, f_n , die einen Unterraum V_n aufspannen, orthogonale bzw. orthonormale Elemente, g_1, \dots, g_n , zu gewinnen, die den gleichen Raum aufspannen. Das kanonische Verfahren dazu heisst *Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren*.

Theorem 1.12. Seien f_1, \dots, f_n n linear unabhängige Elemente eines Vektorraums, die einen Raum V_n aufspannen. Definiere rekursiv Elemente g_i wie folgt:

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, \\ g_2 &= f_2 - g_1 \frac{\langle f_1, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle}, \\ &\dots \quad \dots \\ g_k &= f_k - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \frac{\langle f_k, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle}, \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

bis $k = n$. Dann sind die g_k paarweise orthogonal und spannen den Raum V_n auf. Die normierten Elemente $\hat{g}_k \equiv g_k / \|g_k\|$ bilden eine orthonormale Basis vom V_n .

Beweis. Wir müssen nur nachrechnen, dass die g_k paarweise orthogonal sind und keine von ihnen Null ist. Dazu nehmen wir $m < k$. Dann ist

$$\langle g_m, g_k \rangle = \langle g_m, f_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle g_m, g_i \rangle \frac{\langle f_k, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle}. \tag{1.3.11}$$

Für $k = 2$ bleibt nur der Fall $m = 1$ und hier ist

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \langle g_1, f_2 \rangle - \langle g_1, g_1 \rangle \frac{\langle f_2, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} = 0. \tag{1.3.12}$$

Damit gilt, dass für $k = 2$, für alle $m < k$, $\langle g_m, g_k \rangle = 0$. Wir machen nun die Induktionsannahme, dass diese Aussage für alle $k \leq \ell$ gilt, und wollen zeigen, dass sie dann auch für $k = \ell + 1$ gilt. Wenn wir (1.3.11) betrachten und die Induktionsannahme benutzen, sehen wir aber sofort, dass

$$\begin{aligned} \langle g_m, g_{\ell+1} \rangle &= \langle g_m, f_{\ell+1} \rangle - \sum_{i=1}^{\ell} \langle g_m, g_i \rangle \frac{\langle f_{\ell+1}, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle} \\ &= \langle g_m, f_{\ell+1} \rangle - \langle g_m, g_m \rangle \frac{\langle f_{\ell+1}, g_m \rangle}{\langle g_m, g_m \rangle} = 0. \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Um zu sehen, dass keines der g_i verschwindet, müssen wir nur beobachten, dass für jedes i g_i eine Linearkombination der Elemente f_1, \dots, f_i ist. Dann würde die Aussage $g_{k+1} = 0$ aber bedeuten, dass

$$f_k = \sum_{i=1}^{k-1} g_i \frac{\langle f_k, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle}, \tag{1.3.14}$$

d.h. f_k wäre eine Linearkombination der Elemente f_1, \dots, f_{k-1} , im Widerspruch zur Annahme, dass die f_i linear unabhängig sind. \square

Beispiel 1.13. Ein schönes Beispiel im Kontext von L^2 -Räumen sind die sogenannten *Hermite Polynome*, die in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielen. Wir

betrachten dazu das Gauss'sche Maß $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ auf \mathbb{R} . Wir beginnen mit den Polynomen $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$, und wenden das Gram-Schmidt Verfahren an, um darauf Polynome $H_0(x), H_1(x), \dots, H_n(x)$ zu gewinnen, die orthonormal zu dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 H_0(x) &= 1, & (1.3.15) \\
 H_1(x) &= x - \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \\
 &= x \\
 H_2(x) &= x^2 - \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \\
 &\quad - x \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \\
 &= x^2 - 1,
 \end{aligned}$$

und so weiter. Es gibt eine ziemlich schlaue geschlossene Darstellung aller Hermite Polynome. Man findet nämlich, dass

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}. \quad (1.3.16)$$

Um das zu zeigen, braucht man nur nachzuprüfen, dass die linken Seiten der Gleichung (1.3.16) orthogonal zueinander sind, und dass der Term mit höchstem Grad in $H_n(x)$ gerade x^n ist, wie man es aus dem Gram-Schmidt Verfahren auch bekommt. Beides wird als Übung gegeben.

1.4 Mehrdimensional Integration

Die Definition des Integrals bezüglich eines Maßes, wie wir dies im Lebesgue Integral getan haben, macht es äusserst leicht, Integrale über mehrdimensionalen Räumen, und sogar über sehr viel komplizierteren Mengen, zu definieren. Betrachten wir hierzu zunächst den Raum \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$. Wie im eindimensionalen Fall müssen wir nur eine Menge von elementaren Mengen finden, deren Massen wir leicht vorgeben können, und die ausreichen, das Maß auf einer hinreichend allgemeinen Menge von Teilmengen der Borel sigma-Algebra festlegen. Im Fall des \mathbb{R}^d sind dies naheliegenderweise alle Quader. Das Volumen eines Quaders mit Seitenlängen a_1, a_2, \dots, a_d ist klarerweise $a_1 a_2 \dots a_d$, das Produkt des Seitenlängen. Es mag auf den ersten Blick erstaunen, dass man aus solchen Quadern fast alles basteln kann, aber folgende Überlegung sollte überzeugen: Wenn O eine offene Menge in \mathbb{R}^d ist

(z.B. das Innere des Einheitskreises), dann gibt es für jeden Punkt $x \in O$ einen kleinen Quader Q_x , der x enthält und noch in O enthalten ist. Andererseits liegen die rationalen Zahlen dicht in O . Damit ist dann aber $A = \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap O} Q_x$. Dies ist aber eine abzählbare Vereinigung von Quadern.

Wir wollen das nochmal präzise machen.

Definition 1.14. Die Borel-sigma-Algebra von \mathbb{R}^d , $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ist durch folgende Eigenschaften bestimmt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) Wenn $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dann ist auch $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;
- (iii) Wenn $B_i, i \in \mathbb{N}$, Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind, dann ist auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;
- (iv) Alle offenen Mengen sind in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ enthalten.

Anmerkung 1.15. Anstatt zu fordern, dass alle offenen Mengen in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind, genügt die Forderung, dass alle Quader in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ enthalten seien.

Definition 1.16. Das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^d ist die einzige Funktion $\ell_{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$, mit folgenden Eigenschaften.

- (i) $\ell(\emptyset) = 0$;
- (ii) Wenn $A_i, i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind, so gilt

$$\ell\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(A_i); \quad (1.4.1)$$

- (iii) Wenn Q ein Quader mit Seitenlängen q_1, \dots, q_d ist, so gilt

$$\ell(Q) = q_1 q_2 \dots q_d. \quad (1.4.2)$$

Die Tatsache, dass die oben gegebene Definition sinnvoll ist, also dass es genau eine solche Mengenfunktion gibt, ist nicht ganz so trivial. Die Aussage ist ein Spezialfall des Satzes von Carathéodory, dessen Beweis aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde. Der entscheidende Punkt, den wir uns noch merken wollen, ist, dass die Eigenschaften (i) und (ii) zusammen mit einer Festlegung des Masses aller Quader, immer nur eine einzige Mengenfunktion zulassen.

Messbare Funktionen sind nun wieder Funktionen, für die die Urbilder von offenen Intervallen Elemente der Borel- σ -Algebra sind.

Das Integral einer messbaren Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist nun völlig analog zum eindimensionalen Fall definiert.

1.4.1 Mehrfachintegrale.

Die Konstruktion des mehrdimensionalen Lebesgue Integrals ist zwar einfach, aber natürlich nicht sehr praktikabel, um direkt damit zu rechnen. Dazu wird man am

liebsten die Integration im Mehrdimensionalen auf mehrfache einfache Integrale zurückführen wollen.

Wir behandeln zunächst den Fall des \mathbb{R}^2 . Der allgemeine Fall wird dann völlig analog funktionieren. Wir beginnen zunächst mit positiven Funktionen.

Theorem 1.17. [Fubini-Tonnelli] Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine positive messbare Funktion. Dann sind die Funktionen

$$h(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

und

$$g(y) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(y) dy \quad (1.4.3)$$

Beweis. Die Messbarkeitsaussagen sind einfach zu prüfen, sollen uns aber nicht so sehr interessieren. Wir nehmen nun ein $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und $f = \mathbb{1}_C$. Dann setzen wir

$$C_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in C\}, \quad C^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in C\}.$$

Man kann sich wieder überzeugen, dass beide Mengen messbar sind. Dann ist aber

$$h(x) = \int f(x, y) dy = \int_{C_x} dy = \ell(C_x)$$

und

$$g(y) = \int f(x, y) dx = \ell(C^y)$$

Jetzt kann man die beiden Ausdrücke $\int h(x) dx$ und $\int g(y) dy$ betrachten. Man kann sich davon überzeugen, dass beide Formeln ein Maß definieren (also dass die sigma-Additivität gilt). Wenn C ein Rechteck ist, also $C = A \times B$ mit $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann gilt, dass $C_x = B$ und $C^y = A$, mithin

$$\int h(x) dx = \ell(B) \int \mathbb{1}_A(x) dx = \ell(B) \ell(A) = \int g(y) dy. \quad (1.4.4)$$

Das heisst, beide Ausdrücke sind gleich und geben genau das, was wir von dem Lebesgue Integral gefordert haben. Da aber das Lebesgue Integral wegen der Additivitätsforderung durch Angabe der Werte auf Rechtecken schon eindeutig bestimmt ist, haben wir gezeigt, dass die Aussage des Satzes für Indikatorfunktionen gilt.

Der Fall einfacher Funktionen folgt jetzt aus der Linearität des Integrals. Beliebige positive messbare Funktionen approximieren wir dann monoton durch Folgen von einfachen Funktionen, $f_n \uparrow f$. Dann gilt

$$\int f(x, y) dx dy = \lim_{n \uparrow \infty} \int f_n(x, y) dx dy = \lim_{n \uparrow \infty} \int h_n(x) dx = \int h(x) dx, \quad (1.4.5)$$

wo wir zweimal den Satz von der monotonen Konvergenz angewendet haben, sowie die Tatsache, dass auch $h_n(x) = \int f_n(x,y)dy$ eine monoton wachsende Folge ist, die gegen $h(x)$ strebt. Genauso kann man auch die zweite Darstellung des Integrals erhalten, und der Satz ist bewiesen. \square

Als nächstes betrachten wir den Fall allgemeiner messbarer Funktionen.

Theorem 1.18. [Fubini-Lebesgue] Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar bezüglich des Lebesguemasses auf \mathbb{R}^2 . Dann ist

- (i) $f(x,y)$ für fast-alles x absolut integrierbar bezüglich dy , und umgekehrt.
- (ii) Die Funktionen $h(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$, bzw. $g(y) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$ sind wohldefiniert, ausser möglicherweise auf Mengen vom Maß Null, und absolut integrierbar.
- (iii) Es gilt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} h(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)dy \quad (1.4.6)$$

Beweis. Indem wir den vorhergehenden Satz auf die Funktion $|f|$ anwenden, erhalten wir, dass

$$\int \left(\int |f(x,y)|dy \right) dx = \int |f(x,y)|dxdy < \infty. \quad (1.4.7)$$

Daher folgt, dass $\int |f(x,y)|dy$ nur auf einer Menge vom Maß Null nicht endlich sein kann. Hieraus folgt die erste Behauptung.

Indem wir nun f in den positiven und negativen Teil zerlegen und wieder das Resultat von oben verwenden, finden wir sofort, dass $h(x)$ und $g(y)$ wie behauptet messbar sind (als Differenzen entsprechender messbarer Funktionen), wobei wir genau genommen diesen Funktionen einen beliebigen Wert, etwa 0 für diejenigen x (bzw. y) zuschreiben muss, an denen die absolute Integrierbarkeit nicht gilt. Da dies Nullmengen sind, spielen sie keine Rolle.

Weiter ist

$$\int |h(x)|dx \leq \int \left(\int |f(x,y)|dy \right) dx < \infty,$$

so dass auch die behauptete Integrierbarkeit bewiesen ist.

Um schliesslich den Punkt (iii) zu beweisen genügt es zu benutzen, dass

$$\int f(x,y)dxdy = \int f_+(x,y)dxdy - \int f_-(x,y)dxdy$$

gilt, und den Satz von Fubini-Tonnelli auf beide Terme anzuwenden. \square

Wenn man sich die Details des Beweises anschaut, sieht man, dass die absolute Integrierbarkeit von f wesentlich benutzt wird. Insbesondere ist andernfalls die Schlussfolgerung im Allgemeinen falsch.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Funktion $f(x,y) = xe^{-yx^2} \mathbb{1}_{y>0}$. Hier ist

$$h(x) = \int_0^{\infty} xe^{-yx^2} dy = x^{-1}$$

und

$$g(y) = \mathbb{1}_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-yx^2} dx = 0,$$

für alle $y > 0$. Es ist aber $h(x)$ nicht integrierbar, da sowohl das Integral über den positiven wie über den negativen Teil unendlich sind. Andererseits ist das Integral über $g(x)$ gleich Null. Hier hätten wir also einen schweren Fehler gemacht, wenn wir die Integrationen nacheinander ausgeführt hätten. Wir sehen hier sehr schön, was passiert: Wenn wir nur den positiven oder nur den negativen Teil der Funktion f anschauen, dann erhalten wir

$$h^+(x) = \mathbb{1}_{x \geq 0} \int_0^{\infty} x e^{-yx^2} dy = \mathbb{1}_{x \geq 0} x^{-1}$$

und

$$g^+(y) = \mathbb{1}_{y>0} \int_0^{\infty} x e^{-yx^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-zy} = 2/y.$$

(und ähnlich für den negativen Teil). Die Integrale beider Funktionen sind unendlich. Damit ist f nicht integrierbar, was die nicht-Anwendbarkeit von Fubini auf die volle Funktion erklärt.

Übung. Zeige, dass der Satz von Fubini für die Funktion $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ auf $(0, \infty) \times (0, 1)$ bezüglich des Lebesgue Maßes nicht anwendbar ist.

1.4.2 Transformationssatz

Wir wollen nun zeigen, dass die Definition es sehr leicht macht, in der Praxis wichtige Eigenschaften von mehrdimensionalen Integralen herzuleiten.

Wie schon im eindimensionalen Fall sind Substitutionen ein wichtiges Mittel bei der Berechnung von Integralen. Unser Ziel ist der folgenden Satz:

Theorem 1.19. Sei Ω eine Teilmenge von \mathbb{R}^d , $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei messbar, und sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine invertierbare, differenzierbare Abbildung, und sei $g^{-1} : g(\Omega) \rightarrow \Omega$ die Umkehrabbildung. Dann gilt

$$\int_{\Omega} F(g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{g(\Omega)} F(\mathbf{y}) |\det(Dg^{-1}(\mathbf{y}))| d\mathbf{y}. \quad (1.4.8)$$

Hier bezeichnet $g(\Omega)$ das Bild von Ω unter g , und $Dg^{-1}(\mathbf{y})$ ist die Jacobi-Matrix der Abbildung g^{-1} , also die $d \times d$ -Matrix mit Elemente $(Dg^{-1}(\mathbf{y}))_{ij} = \frac{dg_i^{-1}(\mathbf{y})}{dy_j}$.

Beweis. Wir wollen für den Beweis sehr schrittweise vorgehen. Zunächst sei $F(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_R(\mathbf{y})$ wobei R ein Quader mit Seitenlängen r_1, \dots, r_d sei. Dann ist zunächst klar, dass

$$\int F(g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \ell(\{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \in R\}), \quad (1.4.9)$$

das heisst das Integral ist einfach gleich dem Volumen des Urbilds des Rechtecks R unter g (was wir auch mit $g^{-1}(R)$ bezeichnen wollen). Als nächstes nehmen wir nun an, dass g eine lineare Abbildung sei, also eine Matrix L mit Elementen L_{ij} existiert, so dass $g(\mathbf{x})_i = \sum_{k=1}^d L_{ik}x_k$ ist. Natürlich ist in diesem Fall $Dg(\mathbf{x})$ gerade die Matrix L .

Nach Voraussetzung existiert die inverse Matrix L_{ij}^{-1} , und das Urbild des Quaders R ist das Parallelepipid R' , das von den Vektoren $\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^d$ aufgespannt wird, deren Koordinaten gegeben sind durch

$$q_j^i = L_{ji}^{-1}r_i. \quad (1.4.10)$$

Jetzt braucht man nur noch zu wissen, was das Volumen eines solchen Parallelepipeds ist: es ist gerade $r_1 \dots r_d \left| \det \left(g_{ij}^{-1} \right) \right|$. Da die Determinante der inversen Matrix gerade das Inverse der Determinante der ursprünglichen Matrix ist, ergibt sich für diesen sehr speziellen Fall die Formel

$$\begin{aligned} \int F(g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} &= \left| \det \left(L_{ij}^{-1} \right) \right| r_1 \dots r_d \\ &= \int \left| \det \left(Dg^{-1}(\mathbf{y}) \right) \right| F(\mathbf{y})d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

wie gewünscht.

Wir müssen uns nun überlegen, was wir tun wenn g nicht linear ist. Dazu zerlegen wir unseren Quader R in n^d gleich kleine Quader R_i mit Seitenlängen der Ordnung $1/n$. Für jeden dieser kleinen Quader approximieren wir die Funktion g durch

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_i) + Dg^{-1}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \text{Rest}, \quad (1.4.12)$$

wobei \mathbf{x}_i eine ausgewählte Ecke von R_i ist, und der "Rest" ein Vektor ist, für den gilt, dass $n|\text{Rest}| \rightarrow 0$, wenn n nach unendlich geht. $Dg^{-1}(\mathbf{x}_i)$ ist hier eine Matrix mit Elementen $\frac{\partial g_j^{-1}(\mathbf{x}_i)}{\partial x_m}$, die beste lineare Approximation an g^{-1} an der Stelle \mathbf{x}_i .

Wäre der Rest nicht da, hätten wir sofort, dass das Volumen des Urbildes wieder durch die Determinante der linearen Abbildung $Dg^{-1}(\mathbf{x}_i)$ gegeben ist. Unter Berücksichtigung des Fehlerterms erhalten wir trotzdem

$$\ell(g^{-1}(R_i)) = \ell(R_i) \left| \det \left(Dg^{-1}(\mathbf{x}_i) \right) \right| + \text{Rest}, \quad (1.4.13)$$

wobei der Rest die Eigenschaft hat, dass $n^d|\text{Rest}| \rightarrow 0$, wenn n gegen unendlich geht, da die Funktion g (und also auch g^{-1}) als stetig differenzierbar und invertierbar abgenommen wurde. Damit erhalten wir aber, dass für jeden Quader R ,

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{I}_R(g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} &= \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^{n^d} \int \mathbb{I}_{R_i}(g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} & (1.4.14) \\
&= \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^{n^d} \ell(g^{-1}(R_i)) \\
&= \lim_{n \uparrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n^d} \ell(R_i) |\det(Dg^{-1}(\mathbf{x}_i))| + n^d \text{Rest} \right) \\
&= \int \mathbb{I}_R(\mathbf{x}) |\det(Dg^{-1}(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Damit haben wir die gewünschte Formel bereits für alle Quader gezeigt. Nun legt die Formel

$$\int \mathbb{I}_B(g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \quad (1.4.15)$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ fest. Dies ist wiederum durch die Werte auf allen Quadern bestimmt, und für diese wissen wir, dass es dieselben Werte wie das absolut stetige Maß $|\det(Dg^{-1}(\mathbf{x}))|d\mathbf{x}$ annimmt. Daraus folgt aber wieder, dass beide Masse gleich sind, und somit gilt die behauptete Transformationsformel für Indikatorfunktionen von Borel-Mengen.

Aus der Linearität folgt die Formel aber dann sofort für alle einfachen Funktionen F , und schliesslich, mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, für alle positiven Funktionen. Schlussendlich wird noch in den positiven und negativen Teil zerlegt, und wir erhalten die Formel für alle integrierbaren Funktionen. \square

Alternativ können wir den Transformationssatz auch wie folgt formulieren:

Korollar 1.20. *Sei Ω eine Teilmenge von \mathbb{R}^d , $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei messbar, und sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine invertierbare, stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt*

$$\int_{g(\Omega)} F(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\Omega} F(g(\mathbf{x})) |\det(Dg(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}. \quad (1.4.16)$$

Beweis. Wir ersetzen die Funktion $F(\mathbf{x})$ durch $\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) \frac{1}{|\det(Dg^{-1}(\mathbf{x}))|}$. Wenn wir dies in (1.4.8) einsetzen, erhalten wir

$$\int_{\Omega} F(g(\mathbf{x})) \frac{1}{|\det(Dg^{-1}(g(\mathbf{x})))|} d\mathbf{x} = \int_{g(\Omega)} F(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (1.4.17)$$

Schliesslich benutzen wir noch die Identität, dass

$$Dg^{-1}(g(\mathbf{x})) = (Dg(\mathbf{x}))^{-1}, \quad (1.4.18)$$

und dass $\det(L^{-1}) = (\det L)^{-1}$ ist, um (1.4.16) zu erhalten. Die Identität (1.4.18) folgt wie im Eindimensionalen: Klarerweise ist $g^{-1}(g(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ die identische Abbildung, und nach der Kettenregel

$$\mathbb{I} = D\mathbf{x} = Dg^{-1}(g(\mathbf{x}))Dg(\mathbf{x}).$$

□

Beispiel: Polarkoordinaten. Betrachten wir zunächst den Fall \mathbb{R}^2 . Die Abbildung

$$(r, \theta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty) \times [0, 2\pi),$$

mit

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta(x, y) = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}),$$

heissen "Polarkoordinaten". Die Zugehörige Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Sei nun f eine Funktion von x, y . Dann ist nach unserem Korollar,

$$\begin{aligned} \int f(x, y) dx dy &= \int f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| dr d\theta \\ &= \int f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| dr d\theta \\ &= \int f(x(r, \theta), y(r, \theta)) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Anwendung: Berechnung des Gauss'schen Integrals. Wir hatten schon weiter oben behauptet, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2) dx = \sqrt{2\pi}$. Wir wollen dies nun unter Verwendung von Polarkoordinaten herleiten. Dazu benutzen wir zunächst, dass wegen dem Satz von Fubini-Tonnelli,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2(x,y)/2} dx dy.$$

Jetzt können wir unser oben hergeleitetes Resultat anwenden und zu Polarkoordinaten übergehen:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2(x,y)/2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta.$$

Nach F-T können wir die Integrale hintereinander ausrechnen, und zu Schluss noch die Substitution $z = r^2/2$ durchführen. Das gibt

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-z} dz = 2\pi.$$

Damit ist aber die Behauptung gezeigt.

Anwendung: Gamma- und Betafunktionen. Die Gammafunktion ist definiert als

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx.$$

Mittels der Substitution $x = s^2/2$ können wir diese auch wie folgt darstellen:

$$\Gamma(u) = 2^{1-u} \int_0^\infty s^{2u-1} e^{-s^2/2} ds.$$

Nun wollen wir $\Gamma(u)\Gamma(v)$ berechnen. Wir sehen, dass, unter Verwendung von Fubini,

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 2^{2-u-v} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{2u-1} t^{2v-1} e^{-(s^2+t^2)/2} ds dt$$

ist. Nun führen wir wieder Polarkoordinaten wie im vorigen Beispiel ein. Beachte dabei, dass wir nur über einen Quadranten integrieren. Wir erhalten dann

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r^{2u+2v-1} e^{-r^2/2} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} dr d\theta.$$

Jetzt benutzen wir wieder Fubini und berechnen zunächst das Integral über r , welches wir gleich als Gammafunktion erkennen. Wir erhalten

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v) 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta.$$

Das Integral über θ ist ebenfalls eine spezielle Funktion, die Betafunktion

$$B(u, v) \equiv 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta.$$

Also haben wir

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Mit dieser Formel können wir die Gammafunktion für spezielle Werte berechnen. Zum Beispiel ist

$$B(1/2, 1/2) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi.$$

Da $\Gamma(1) = 1$ ist, folgt

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Da wir mit partieller Integration zeigen können, dass $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$, lassen sich damit alle Werte der Gammafunktion an den Stellen $1/2 + n$ mit $n \in \mathbb{N}$ berechnen.

Anwendung 3: Das Volumen der n -dimensionalen Kugel. Das Volumen der n -dimensionalen Kugel können wir darstellen als

$$v_n \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}} d\mathbf{x}.$$

Nun können wir zunächst Fubini anwenden, um dies wie folgt umzuschreiben:

$$v_n = \int_{-1}^1 \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq 1-x_n^2\}} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

In dem inneren Integrale benutzen wir den Transformationssatz, um zu sehen, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq 1-x_n^2\}} dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 / (1-x_n^2) \leq 1\}} dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \leq 1\}} dx_1 \dots dy_{n-1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2} = v_{n-1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Rekursionsformel

$$v_n = v_{n-1} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-1)/2} dx = v_{n-1} 2 \int_0^1 (1-x^2)^{(n-1)/2} dx.$$

Substituieren wir nun $x(\theta) = \sin \theta$, we see that

$$2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta = B(1/2, (n+1)/2).$$

Daher haben wir, mit der oben gezeigten Formel für die Betafunktion,

$$v_n = v_{n-1} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Diese Rekursion lässt sich nun explizit lösen, und wir erhalten

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}.$$

Kapitel 2

Kurvenintegrale

In diesem Kapitel behandeln wir Integrale entlang von Kurven im \mathbb{R}^d . Wir folgen hier teilweise dem 6. Kapitel aus dem Buch von W. Fleming [2]. Anwendungen in der Mechanik finden sich unter anderem in dem Buch von Arnold [1]. Online zugänglich ist ein Skript von Andreas Knauf [3] dass für einen ähnlichen Kurs wie diesen geschrieben wurde.

2.1 Kurven im \mathbb{R}^d

Unter einer Kurve im \mathbb{R}^d können wir uns die Trajektorie eines Teilchens, das sich während eines Zeitintervalls I im \mathbb{R}^d bewegt, vorstellen. Wir benutzen oft $I = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$. Die Position des Teilchens zur Zeit t ist dann gegeben durch eine Funktion

$$\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (2.1.1)$$

Wir erinnern uns an die Definition der Ableitung: \mathbf{g} ist bei t_0 differenzierbar, genau dann, wenn es einen Vektor $\mathbf{v}(t_0) \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)} \delta^{-1} |\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0) - (t - t_0)\mathbf{v}(t_0)| = 0. \quad (2.1.2)$$

Anschaulich bedeutet das, dass die Gerade $L(t) = \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0)$ die *Tangente* an die Kurve \mathbf{g} an der Stelle $\mathbf{g}(t_0)$ ist. $\mathbf{v}(t_0)$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t_0 . Wir bezeichnen oft $\mathbf{v}(t_0) = \dot{\mathbf{g}}(t_0)$. Wenn die Funktion $\mathbf{v} : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ als Funktion von t selbst eine stetige Funktion ist, so heißt \mathbf{g} stetig differenzierbar oder “in der Klasse $C^{(1)}$ ”,

Wenn $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ eine (orthonormale) Basis des \mathbb{R}^d sind, dann können wir \mathbf{g} darstellen als

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^d g^i(t) \mathbf{e}_i. \quad (2.1.3)$$

Die Funktionen g^i heissen Koordinatenfunktionen. Wenn \mathbf{g} differenzierbar sind, dann sind auch die g^i differenzierbar, und

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = \sum_{i=1}^d \dot{g}^i(t) \mathbf{e}_i. \quad (2.1.4)$$

Es wird im Folgenden wichtig sein, zwischen der Funktion \mathbf{g} und dem Bild der Menge I unter \mathbf{g} zu unterscheiden. Letzteres ist einfach die eindimensionale Untermenge des \mathbb{R}^d , die unser Teilchen während des Zeitintervalls I durchläuft. Klarerweise kann man aus diesem Bild nicht mehr auf die Geschwindigkeit des Teilchens zurückschliessen. Um das präzise zu machen, betrachten wir die Funktion \mathbf{g} nunmehr als eine *Parametrisierung* einer Kurve γ . Klarerweise gilt folgendes: Sei $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$, $\phi : J \rightarrow I$ stetig differenzierbar mit den Eigenschaften

- (i) ϕ ist streng monoton wachsend, d.h. $\phi'(s) > 0, \forall s \in J$;
- (ii) $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$.

Dann ist die Funktion $\mathbf{h} \equiv \mathbf{g} \circ \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$, wobei $\mathbf{h}(s) = \mathbf{g}(\phi(s))$ eine andere Parametrisierung der gleichen Kurve γ .

Definition 2.1. Zwei Parametrisierungen \mathbf{g}, \mathbf{h} heissen *äquivalent*, wenn es eine Funktion ϕ wie beschrieben gibt, so dass $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \phi$ gilt.

Jetzt können wir formal definieren, was wir unter einer $C^{(i)}$ -Kurve verstehen wollen.

Definition 2.2. Eine Kurve γ der Klasse $C^{(1)}$ ist eine Äquivalenzklasse von Parametrisierungen der Klasse $C^{(1)}$.

Es ist wichtig sich klarzumachen, dass die eine Kurve mehr ist, als nur eine Teilmenge von \mathbb{R}^d . So ist z.B. nirgends gesagt, dass γ nicht mehrfach denselben Wert annehmen kann, sich die Kurve also nicht selbst überschneiden darf. Unsere Kurven wissen an solchen Punkten, in welcher Richtung es weitergeht...

Betrachte z. B. die Funktion $f(x, y) = \cos(x)\mathbf{e}_1 + \sin(x)\mathbf{e}_2$. Als Funktion von $[0, 2\pi)$ ist dies gerade der Einheitskreis in \mathbb{R}^2 . Wir können aber dieselbe Funktion auf $[0, 4\pi)$ betrachten. Dann ist das Bild beider Mengen jeweils das gleiche, aber die Kurven sind verschieden: einmal wird der Kreis nur einmal durchfahren, im zweiten Fall aber zweimal. Diese Kurven sind nicht äquivalent.

Beachte, dass nach der Kettenregel für zwei Parametrisierungen gilt:

$$\dot{\mathbf{h}}(s) = \dot{\mathbf{g}}(\phi(s))\phi'(s) \quad (2.1.5)$$

Wir wollen nun die Länge einer Kurve definieren. Physikalisch naheliegend ist, dass die zurückgelegte Strecke das Integral des Absolutbetrags der Geschwindigkeit ist.

Definition 2.3. Sei γ eine Kurve und \mathbf{g} eine Parametrisierung, so ist die *Länge* von γ

$$l(\gamma) \equiv \int_I |\dot{\mathbf{g}}(t)| dt. \quad (2.1.6)$$

Das diese Definition stimmig ist, liegt daran, dass sie unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist. Falls \mathbf{g}, \mathbf{h} äquivalente Parametrisierungen sind, so gilt

$$\int_J |\dot{\mathbf{h}}(s)| ds = \int_J |\dot{\mathbf{g}}(\phi(s))| \phi'(s) ds = \int_I |\dot{\mathbf{g}}(t)| dt. \quad (2.1.7)$$

Wenn \mathbf{g} eine Parametrisierung einer Kurve auf dem Intervall $[a, b]$ ist, so stellt die Funktion

$$S(t) \equiv \int_a^t |\dot{\mathbf{g}}(s)| ds, \quad (2.1.8)$$

die bis zur Zeit t zurückgelegte Strecke, auch *Bogenlänge* genannt, dar. $S(t)$ liefert eine spezielle Parametrisierung der Kurve γ (nachprüfen!). Sei $\phi(s) = S^{-1}(s)$, und $\mathbf{h} \equiv \mathbf{g} \circ \phi$. Dann gilt

- (i) \mathbf{h} ist eine Parametrisierung von γ mit Parameterbereich $[0, l(\gamma)]$;
- (ii) Es gilt

$$|\dot{\mathbf{h}}(s)| = |\dot{\mathbf{g}}(\phi(s))| \phi'(s) = 1; \quad (2.1.9)$$

Letzteres gilt, weil $\phi'(s) = \frac{1}{S'(\phi(s))}$ und $S'(\phi(s)) = |\dot{\mathbf{g}}(\phi(s))|$. Die Parametrisierung \mathbf{h} benutzt also als "Zeit" gerade die Bogenlänge, und ihre Geschwindigkeit ist damit der Einheitstangentenvektor an die Kurve.

2.2 Differentialformen

Unser Ziel ist es Integranden für Integrale über Kurven zu finden. So wollen wir etwa in der Mechanik die Energie einer Trajektorie als Integral längs der Kurve die das Teilchen zurücklegt darstellen. Dazu müssen wir etwas ausholen. Die folgende Konstruktion scheint vielleicht anfänglich etwas kompliziert, es wird aber später hoffentlich klar werden, warum das sehr praktisch ist.

Wir wissen schon, dass im \mathbb{R}^d der dazu duale Raum der linearen Abbildungen von \mathbb{R}^d nach \mathbb{R} , $(\mathbb{R}^d)^*$, zu \mathbb{R}^d isomorph ist. Wir wollen diese Objekte trotzdem auseinander halten. Betrachten wir nun eine Kurve γ . Wir nennen eine Abbildung, $\mathbf{v} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$, ein Vektorfeld. Zum Beispiel fassen wir die Geschwindigkeitsvektoren als Vektorfeld auf.

Entsprechen können wir nun ein Feld von linearen Abbildungen an jedem Punkt vorgeben. Dies nennen wir eine *Differentialform* (genauer, eine Differential-eins-Form).

Wir bezeichnen eine Differentialform gerne mit ω . Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (wir vergessen für einen Moment mal, dass wir auf einer Kurve sind) ist dann $\omega(\mathbf{x})$ eine lineare Abbildung. Wenn wir mit \mathbf{e}^i die Elemente der dualen Basis dieses Raumes bezeichnen, so ist

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}^i, \quad (2.2.1)$$

und wenn \mathbf{v} ein Vektorfeld ist, so ist

$$(\omega(x), \mathbf{v}(x)) = \sum_{i=1}^d \omega_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}).$$

Bemerkung zur Notation: Eigentlich müssten wir für die Anwendung von $\omega(\mathbf{x})$ auf $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ schreiben $\omega(\mathbf{x})(\mathbf{e}(\mathbf{x}))$, um deutlich zu machen, dass wir eine lineare Abbildung auf einen Vektor anwenden. Wir werden jedoch meisst die Notation in Form des Skalarprodukts wie oben wählen, da sie suggestiver ist.

Genau wie der Gradient einer Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ein Vektorfeld liefert, so kann man aus einer solchen Funktion auch eine Differentialform gewinnen. Man nennt diese das Differential, und schreibt gerne

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i. \quad (2.2.2)$$

Dabei bedeuten die Symbole dx_i die Differentialform mit dem konstanten Wert \mathbf{e}^i , also $dx_i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i$. Wir haben also die Konvention $(dx_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$.

Differentialformen mit der Eigenschaft, dass es eine Funktion gibt, so dass $\omega = df$ heissen *exakt*. Wie werden bald sehen, warum exakte Differentialformen wichtig sind

Wenn ω exakt ist, dann ist ja $\omega_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ und daher, falls die ω_i stetig differenzierbar sind,

$$\frac{\partial \omega_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (2.2.3)$$

wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Wenn (2.2.3) gilt, so heisst eine Differentialform *geschlossen*.

2.3 Integrale längs einer Kurve

Sei ω eine stetige Differentialform und γ eine $C^{(1)}$ -Kurve. Wir können jetzt das Integral von ω längs γ definieren.

Definition 2.4. Sei \mathbf{g} eine Parametrisierung von γ . Dann ist

$$\int_{\gamma} \omega \equiv \int_I (\omega(\mathbf{g}(t)), \dot{\mathbf{g}}(t)) dt = \int_I \left(\sum_{i=1}^d \omega_i(\mathbf{g}(t)) g'_i(t) \right) dt. \quad (2.3.1)$$

Anmerkung 2.5. Es ist klar, dass wir die obige Definition auch auf Kurven anwenden können, die nur stückweise $C^{(1)}$ ("glatt") sind. Dazu wird einfach das Integral als Summe der Integrale über die einzelnen glatten Teile definiert.

Wieder ist die Definition unabhängig von der Wahl der Parametrisierung, d.h. wir haben eine intrinsische Definition des Kurvenintegrals.

Die schon definierte Länge einer Kurve kann man ebenfalls als das Integral einer Differentialform schreiben. Sei nämlich

$$\tau(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \tau_i(\mathbf{x}) dx_i,$$

wobei für jedes $\mathbf{x} \in \gamma$, $\tau(\mathbf{x})$ der Einheits-Tangententialvektor zu γ bei \mathbf{x} ist, das heißt, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t_0)$, dann ist $\tau(\mathbf{x}) = \frac{\dot{\mathbf{g}}(t_0)}{|\dot{\mathbf{g}}(t_0)|}$. Wir erhalten dann in der Tat

$$\int_{\gamma} \tau = \int_I \frac{(\dot{\mathbf{g}}(t), \dot{\mathbf{g}}(t))}{|\dot{\mathbf{g}}(t)|} dt = \int_I |\dot{\mathbf{g}}(t)| dt.$$

Wir sehen hier, dass die Differentialform ω wirklich nur auf γ definiert sein muss. Man beachte, dass der Einheits-Tangententialvektor selbst unabhängig von der Parametrisierung ist.

Eine erste bemerkenswerte Beobachtung ist, dass, wenn ω exakt ist, f gewissermaßen die Rolle der Stammfunktion einnimmt:

Theorem 2.6. *Sei ω exakt, also $\omega(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x})$. Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt \mathbf{x}_0 und Endpunkt \mathbf{x}_1 . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} \omega = f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0). \quad (2.3.2)$$

Inbesondere ist, wenn γ geschlossen ist, für jede exakte Differentialform ω ,

$$\int_{\gamma} \omega = 0. \quad (2.3.3)$$

Umgekehrt gilt, falls ω eine Differentialform ist, so dass für alle geschlossenen Kurven (2.3.3) gilt, dann ist ω exakt.

Beispiel. Sei γ der Einheitskreis im \mathbb{R}^2 , und $\omega = xdy - ydx$ eine Differentialform. Wir wollen $\int_{\gamma} \omega$ berechnen. Dazu wählen wir eine Parametrisierung des Kreises durch $g(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Dann ist

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta)(-\sin(\theta))) d\theta = 2\pi.$$

Die Differentialform $x dy - y dx$ ist also nicht exakt. Nehmen wir dagegen die Differentialform $\omega' = x^2 dx + y^2 dy$, so erhalten wir

$$\int_{\gamma} \omega' = \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta)(-\sin(\theta)) + \sin^2(\theta) \cos(\theta)) d\theta = 0.$$

In der Tat ist ja $\omega' = \frac{1}{3} d(x^3 + y^3)$ eine exakte Form.

2.4 Energie und Hamilton'sche Gleichungen

Ein klassisches Beispiel für die hier behandelte Theorie ist die Hamilton'sche Mechanik. Man betrachtet hier ein mechanisches System in einem Raum \mathbb{R}^{2n} , dem *Phasenraum*, wobei die eine Hälfte der Koordinaten die Orte, q_i , und die andere die Impulse, p_i , der Teilchen angeben. Die Energie des Systems ist gegeben durch eine *Hamiltonfunktion* $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten nun die Differentialform $\omega_H = dH$. Für eine Trajektorie im Phasenraum ist dann

$$H(\mathbf{x}_1) - H(\mathbf{x}_0) = \int_{\gamma} \omega_H = \int_0^t \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))}{\partial q_i} \dot{q}_i(t) + \frac{\partial H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))}{\partial p_i} \dot{p}_i(t) \right) dt.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ eine Parametrisierung von γ . Das Prinzip der Erhaltung der Energie (für abgeschlossene Systeme) besagt nun, dass nur solche Trajektorien physikalisch erlaubt sind, für die H längs γ konstant ist. Dies können wir kurz formulieren als $\omega_H = 0$ längs γ , oder

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))}{\partial q_i} \dot{q}_i(t) + \frac{\partial H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))}{\partial p_i} \dot{p}_i(t) \right) = 0.$$

Letztere ist eine Differentialgleichung die man auch Pfaff'schen Typ nennt. Wir sehen, dass wir eine Lösung erhalten, wenn wir die $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung fordern:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= - \frac{\partial H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Letztere heissen Hamilton'sche Bewegungsgleichungen.

Kapitel 3

Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Integration auf höherdimensionalen gekrümmten Mengen (wie etwa Kugeloberflächen, Ellipsoide, etc.) zu definieren. Eine Kernaussage wird der Satz von Stokes sein.

3.1 Mannigfaltigkeiten

Im vorherigen Kapitel haben wir Kurven im \mathbb{R}^n als Äquivalenzklassen von Parametrisierungen durch (stückweise) differenzierbare Funktionen $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eingeführt. Wir wollen nun ein analoges Konzept für höherdimensionale Objekte einführen. Das einfachste Beispiel ist etwa die Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3 . Sie ist durch eine Gleichung

$$S^2(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

als Menge bestimmt. Allgemeiner kann man viele Mannigfaltigkeiten als Mengen durch Gleichungen der Form $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ festlegen, wobei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ eine (differenzierbare) Funktion ist. Eine solche Menge ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension d . Eine andere Betrachtungsweise ist die Idee, dass eine Mannigfaltigkeit (zumindest lokal) das Bild einer Teilmenge, typischerweise ein Quader, $I \subset \mathbb{R}^d$ in \mathbb{R}^n unter einer Abbildung $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist. So ist etwa die Kugel S^2 das Bild der Menge $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ unter der Abbildung

$$g(\phi, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi).$$

Im allgemeinen wird man eine Mannigfaltigkeit nicht mit einer einzigen solchen Funktion g beschreiben können, sondern eine solche Beschreibung mag nur "lokal" gelten. So ist schon im obigen Beispiel der Kugeloberfläche, der Nord- und Südpol das Bild aller Punkte der Form $(0, \phi)$ bzw (π, ϕ) , d.h. die Abbildung g ist nicht auf der ganzen Kugel invertierbar. Dies ist häufig der Fall. Die gesamte Mannigfaltigkeit wird dann durch mehrere lokale Stücke zusammengesetzt. Wir wollen uns davon zunächst nicht beirren lassen und betrachten zunächst den Fall von Mannig-

faltigkeiten, die Bilder eines offenen Quaders $I \subset \mathbb{R}^r$ unter einer invertierbaren und stetig differenzierbaren Abbildung g sind.

Wir spezifizieren die hier relevanten Abbildungen noch genauer.

Definition 3.1. Eine Abbildung \mathbf{g} von $D \subset \mathbb{R}^d$ nach \mathbb{R}^d , $d \geq r$, heisst *regulär*, genau dann, wenn gilt:

- (i) \mathbf{g} ist stetig differenzierbar;
- (ii) eins-zu eins von D nach $\mathbf{g}(D)$;
- (iii) für alle $\mathbf{x} \in M$ hat $D\mathbf{g}(\mathbf{x})$ Rang d .

Insbesondere ist \mathbf{g} auf ihrem Bild umkehrbar.

Wieder müssen wir \mathbf{g} als eine Parametrisierung der eigentlichen Mannigfaltigkeit auffassen. Wir sagen diesmal, dass zwei Parametrisierungen $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{h} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit $\mathbf{g}(D) = \mathbf{h}(E)$ äquivalent sind, wenn es eine *reguläre* Abbildung $\phi : D \rightarrow E$ gibt, so dass $\phi(D) = E$ und für alle $\mathbf{x} \in D$ gilt, dass $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\phi(\mathbf{x}))$.

3.2 Differential-2-Formen und Flächenintegrale

Wir haben bereits im letzten Kapitel Differentialformen kennengelernt. Dabei hatten wir gesehen, dass Differential-1-Formen natürliche Integranden für die Integration über Kurven sind, da diese den Tangentialvektoren (Geschwindigkeiten) reelle Zahlen zuordnen. Angenommen wir wollen über eine zwei-dimensionale Fläche integrieren. Dann haben wir an jedem Punkt eine Tangentialfläche. Ein Integrand sollte diesem Objekt eine Zahl zuordnen. Dies führt uns auf natürliche Art dazu, sogenannte Differential-2-Formen einzuführen.

3.2.1 Differential-2-Formen

Eine Abbildung $r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst bi-linear, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} r(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) &= \alpha\beta r(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & r(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) &= r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \text{und} & & r(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Der Raum der bilinearen Abbildungen ist ein Vektorraum der isomorph zum Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ selbst ist. Wenn \mathbf{f} eine solche Abbildung ist und \mathbf{e}_i die Basisvektoren einer Orthogonalbasis des \mathbb{R}^n sind, so legen die Werte $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f_{ij}$ \mathbf{f} eindeutig fest. Wenn wir die Basisvektoren des Dualraums zu \mathbb{R}^n \mathbf{e}^i nennen, so können wir \mathbf{f} darstellen als

$$\mathbf{f} = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j, \quad (3.2.2)$$

und die linearen Abbildungen $\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j$ bilden eine Orthonormalbasis. Sie haben die Eigenschaft, dass

$$\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \delta_{ik} \delta_{lj} \quad (3.2.3)$$

gilt. Die Isometrie zum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch die Abbildung

$$\mathbf{f} \rightarrow \hat{\mathbf{f}} = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j.$$

Wir können uns jede bi-lineare Abbildung als $n \times n$ -Matrix, R , vorstellen, deren Matrixelemente gerade die Koeffizienten $r_{ij} = r(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ sind. Dann hat die Anwendung der Abbildung r auf zwei Vektoren \mathbf{a}, \mathbf{b} die folgende Darstellung:

$$r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{a}, R\mathbf{b} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i r_{ij} b_j. \quad (3.2.4)$$

Eine 2-lineare Abbildung oder bi-lineare Abbildung $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *alternierend*, wenn

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{r}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (3.2.5)$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Für die Koeffizienten $r_{ij} = r(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ bedeutet dies, dass $r_{ij} = -r_{ji}$ ist. Der Raum $(\mathbb{R}_2^n)^*$ der alternierenden Bilinearformen ist daher isomorph zum Raum der reellen schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen. Man nennt alternierende Bilinearformen auch *Ko-Vektoren vom Grad 2*.

Die Ko-Vektoren \mathbf{e}^{ij} mit der Eigenschaft, dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$\mathbf{e}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_i y_j - x_j y_i \quad (3.2.6)$$

für $i > j$ bilden eine Basis des $(n-1)n/2$ -dimensionalen Vektorraums $(\mathbb{R}_2^n)^*$.

3.2.1.1 Das äussere Produkt.

Aus linearen 1-Formen kann man alternierende lineare 2-Formen durch die Bildung des sogenannten *äusseren Produkts* erhalten.

Sei $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}^i$ und $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}^j$. Dann definieren wir die alternierende 2-form

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \mathbf{e}^{ij} = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) \mathbf{e}^{ij}. \quad (3.2.7)$$

Insbesondere ist $\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^{ij}$.

3.2.1.2 Der Fall $n = 2$.

In dem speziellen Fall $n = 2$ ist die Dimension des Raumes $(\mathbb{R}_2^2)^*$ gerade gleich eins, d.h. der Raum der alternierenden Bilinearformen ist isomorph zu den reellen

Zahlen. Das äussere Produkt zweier 1-Formen ist dann gerade

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}^{12} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}^{12}. \quad (3.2.8)$$

Dieser Zusammenhang zu Determinanten wird sich als ganz wesentlich für unsere Zwecke erweisen.

3.2.1.3 Der Fall $n = 3$.

Ein weiterer Spezialfall ergibt sich in drei Dimensionen. Hier ist die Dimension des Raumes $(\mathbb{R}_2^3)^*$ gleich 3, und der Raum der alternierenden 2-Formen ist isomorph zum Grundraum \mathbb{R}^3 selbst. D.h., wir können jede schiefsymmetrische 3×3 -Matrix mit einem Vektor identifizieren:

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ -r_{12} & 0 & r_{23} \\ -r_{13} & r_{23} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_{23} \\ -r_{13} \\ r_{12} \end{pmatrix}.$$

Der Vektor, der der 2-Form

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ * & 0 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht, ist dann durch das sogenannten *Kreuzprodukt* gegeben:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Man kann nachrechnen, dass die Anwendung der 2-Form $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ auf zwei Vektoren mittels Kreuz- und Skalarprodukt wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &= \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Für das Kreuzprodukt benutzt man auch folgende Schreibweise:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j y_k,$$

wobei ε , der sogenannte ε -Tensor, wie folgt beschrieben ist:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jik}, \quad \text{und} \quad \varepsilon_{123} = 1.$$

3.2.2 Differential-2-Formen.

Wie im Fall von 1-Formen definieren wir eine Differential-2-Form als eine Funktion, ω , von einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ in den Raum der alternierenden 2-Formen, $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}_2^n)^*$. Das äussere Produkt kann sofort auf Differentialformen übertragen werden: Wenn ω und ω' Differential-1-Formen sind, so ist $\omega \wedge \omega'$ definiert durch

$$(\omega \wedge \omega')(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) \wedge \omega'(\mathbf{x}). \quad (3.2.10)$$

Insbesondere ist die Differential-2-Form $dx_i \wedge dx_j$ die konstante Form $(dx_i \wedge dx_j)(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{ij}$. Wir können also jede Differential-2-Form in der Form

$$\omega = \sum_{i < j}^n \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad (3.2.11)$$

schreiben, wobei die Koeffizienten ω_{ij} reelwertige Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^n$ sind. Es gilt noch

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad dx_i \wedge dx_i = 0.$$

Wir hatten gesehen, wie wir Differential-1-Formen aus Funktionen über das Differential gewinnen können. Ähnlich kann man auch Differential-2-Formen aus Differential-1-Formen gewinnen. Dazu benötigen wir die sog. *äussere Ableitung* (auch *äusseres Differential* genannt).

Dazu sei ω eine Differential-1-Form, deren Koeffizientenfunktionen stetig differenzierbar sind. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} d\omega &\equiv \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx_i & (3.2.12) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i < j}^n \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Aus der letzten Formel lesen wir eine schöne Beobachtung ab: Eine 1-Form ω ist geschlossen, genau dann wenn $d\omega = 0$ gilt. Insbesondere gilt stets, dass $d(df) = 0$.

3.2.2.1 Wieder der Fall $n = 3$.

Für den Sonderfall $n = 3$ können wir wieder unsere spezielle Vektornotation wählen. Wenn ω eine Differential-1-Form ist, dann spricht die Form $d\omega$ dem Vektor

$$\operatorname{rot} \omega \equiv \nabla \times \omega \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Flächeninhalt und Integration

Bevor wir weitermachen, wollen wir uns fragen, wozu diese seltsamen Definitionen gut sind. Offenbar müssen alternierende 2-Formen etwas mit Volumina zu tun haben. Betrachten wir dazu zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Wenn diese nicht linear abhängig sind, so definieren sie eine zwei-dimensionale Ebene, E , im \mathbb{R}^n . In dieser Ebene spannen die beiden Vektoren ein Trapez, T , auf, und wir können uns fragen, was das zwei-dimensionale Volumen dieses Trapezes ist. Die Antwort ist

$$\operatorname{vol}_2(T) = |\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}| \equiv \sqrt{\sum_{i < j}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2}. \quad (3.2.13)$$

Dies zu sehen ist einfach. Wir wählen eine Orthonormalbasis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, so dass die Einheitsvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in der von \mathbf{x}, \mathbf{y} definierten Ebene liegen. Dann ist

$$\sum_{i < j}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}^2. \quad (3.2.14)$$

Dies erkennen wir aber als das Volumen eine Trapezes im \mathbb{R}^2 .

Jetzt verstehen wir die folgende Definition des Volumens (=Flächeninhalt) einer zwei-dimensionalen Fläche im \mathbb{R}^n .

Definition 3.2. Sei M eine $C^{(1)}$ -Mannigfaltigkeit der Dimensions 2 und $\mathbf{g} : D \rightarrow M = \mathbf{g}(D)$ eine $C^{(1)}$ Parametrisierung von M .

$$\operatorname{vol}_2(M) = \int_D \left| \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t} \right| ds dt \quad (3.2.15)$$

Wie bei der Definiton der Kurvenlänge ist es wichtig, dass die Definition parametrisierungsinvariant ist. Dies wird genauso überprüft wie im Fall des Linienintegrals: Sei $\phi : K \rightarrow D$ regulär und $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \phi$, dann ist

$$\begin{aligned}
& \int_K \left| \frac{\partial \mathbf{h}(s,t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{h}(s,t)}{\partial t} \right| ds dt & (3.2.16) \\
&= \int_K \left| \frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial t} \right| ds dt \\
& \int_K \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2(s,t)}{\partial s} \right) \\
& \quad \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2(s,t)}{\partial t} \right) \Big| ds dt
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir aber wegen der Definition des äusseren Produkts für beliebige \mathbf{h}, \mathbf{g} , und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Zahlen,

$$(\mathbf{g}\alpha + \mathbf{h}\beta) \wedge (\mathbf{g}\gamma + \mathbf{h}\delta) = \alpha\delta \mathbf{g} \wedge \mathbf{h} + \beta\gamma \mathbf{h} \wedge \mathbf{g} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \mathbf{g} \wedge \mathbf{h}.$$

Der Term in der Klammer ist aber gerade eine Determinante. Damit erhalten wir

$$\int_K \left| \frac{\partial \mathbf{h}(s,t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{h}(s,t)}{\partial t} \right| ds dt = \int_K \left| \frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial \phi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(\phi(s,t))}{\partial \phi_2} \right| |\det D\phi(s,t)| ds dt \quad (3.2.17)$$

Nach dem Transformationssatz ist letzteres aber

$$\int_M \left| \frac{\partial \mathbf{g}(\phi_2)}{\partial \phi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(\phi_1)}{\partial \phi_2} \right| d\phi_1 d\phi_2. \quad (3.2.18)$$

Dies ist aber gerade die gewünschte Identität.

Beispiel: Oberfläche der Einheitskugel. Wir betrachten die Parametrisierung der Kugeloberfläche (von denen wir die zwei Pole wegnehmen) wie zu Beginn des Kapitels angegeben. Dann ist

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-\sin \theta, \cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi)$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \phi} = (0, -\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi)$$

Dann ist

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \phi} = \sin^2 \theta \sin \phi \mathbf{e}^{1,2} - \sin^2 \theta \cos \phi \mathbf{e}^{1,3} - (\cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi + \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi) \mathbf{e}^{2,3}.$$

und

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \phi} \right|^2 = (\sin^4 \theta \cos^2 \phi + \sin^4 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta.$$

Daher erhalten wir für die Kugeloberfläche

$$\text{Vol}_2(S^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin \theta| d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi.$$

Das die Definition des Flächeninhalts mit dem anschaulichen Begriff zusammenfällt zeigt man im wesentlichen nach dem gleichen Schema, mit dem wir schon den Transformationssatz 1.19 bewiesen haben: Wir beginnen mit dem Fall in dem D ein Rechteck und \mathbf{g} eine lineare Abbildung ist. Für diesen Fall folgt das Ergebniss aus (3.2.13). Als nächstes zerlegt man ein Rechteck in viele kleine Rechtecke und benutzt, dass man \mathbf{g} auf jedem kleinen Rechteck gut linear mit der Ableitung approximieren kann. Das liefert die Formel, wenn D ein Rechteck ist. Schliesslich kann man wieder durch weitere Approximation zu allgemeineren Gebieten übergehen. Die Details kann man etwa in [2] finden.

Die Länge der 2-Form $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ kann noch in einer weiteren Weise interpretiert werden. Es gilt nämlich, wie man leicht nachrechnet,

$$|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}|^2 = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.2.19)$$

Damit lässt sich das Volumen auch in der Form

$$\text{vol}_2(M) = \int_D \frac{\frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t} \right|} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t} \right) ds dt \quad (3.2.20)$$

darstellen. Dies ist von der Form

$$\int_D \mathbf{o}(\mathbf{g}(s,t)) \left(\frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t} \right) ds dt, \quad (3.2.21)$$

wo \mathbf{o} eine Differential-2-Form ist. Interessanterweise ist diese Differentialform bis auf ein Vorzeichen von der Wahl der Parametrisierung \mathbf{g} unabhängig und heisst *Orientierung* der Fläche. Um dies zu verstehen, benötigen wir folgende Aussage.

Lemma 3.3. . Seien $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ linear unabhängig und seien $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ ebenfalls linear unabhängig. Dann gibt es eine Konstante, $c \neq 0$, so dass

$$\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2 = c \mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2. \quad (3.2.22)$$

Beweis. Wir müssen zunächst noch eine Verallgemeinerung der Formel (3.2.14) herleiten. Seine $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ Vektoren und $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ 1-Formen. Sei A die 2×2 -Matrix mit Elementen $A_{ij} = \mathbf{a}^i(\mathbf{h}_j)$. Dann gilt

$$\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \det(A). \quad (3.2.23)$$

Es genügt, diese Identität für den Fall nachzurechnen, dass \mathbf{h}_i Basisvektoren sind (Warum?). In dem Fall ist aber

$$\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (a_1^2 a_2^1 - a_2^2 a_1^1),$$

und A ist gerade die Matrix $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$, so dass die Behauptung (3.2.23) folgt. Es seien \mathbf{s}_1 sowie \mathbf{s}_2 Linearkombinationen der $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$, also

$$\mathbf{s}_i = \sum_{k=1}^2 c_i^k \mathbf{t}_k, \quad , j = 1, 2.$$

Dann ist für jedes $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$,

$$\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \det(\mathbf{t}_i(\mathbf{h}_j)), \quad (3.2.24)$$

und

$$\mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \det(\mathbf{s}_i(\mathbf{h}_j)). \quad (3.2.25)$$

Aber

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{h}_j) = \sum_{k=1}^2 c_i^k \mathbf{t}_k(\mathbf{h}_j).$$

Das bedeutet, dass die Matrix in (3.2.25) gerade das Produkt der Matrix in (3.2.24) und der Matrix C mit den Koeffizienten c_i^j ist. Daher gilt

$$\mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \det(\mathbf{s}_i(\mathbf{h}_j)) = \det(C) \det(\mathbf{t}_i(\mathbf{h}_j)), \quad (3.2.26)$$

Damit haben wir die gewünschte Identität mit $c = \det(C)$. \square

Daraus ergibt sich aber das wichtige Korollar:

Korollar 3.4. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Lemmas, gilt, dass*

$$\frac{\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2}{|\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2|} = \pm \frac{\mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2|}. \quad (3.2.27)$$

Das Vorzeichen in (3.2.27) bestimmt die relative *Orientierung* der jeweiligen Paare von Tangentialvektoren.

Eine wichtige Folgerung aus dieser Beobachtung, ist, dass die Form τ die in (3.2.21) gegeben ist, bis auf ein Vorzeichen von der Wahl der Paramterisierung unabhängig ist. Man nennt diese Differentialform auch *Orientierung* und die Äquivalenzklasse von Parametrisierungen, die das Vorzeichen der Form nicht ändert, eine *orientierte Fläche (Mannigfaltigkeit)*.

Jetzt kommen wir zur wichtigsten Definition in diesem Abschnitt. Wir definieren das Integral einer Differential-2-Form über eine Fläche.

Definition 3.5. Sei M ein orientierte Fläche und ω ein Differential-2-Form die auf S definiert ist. Sei $\mathbf{g} : D \rightarrow M$ eine Parametrisierung der Fläche M . Dann ist das Integral von ω über M gegeben durch

$$\int_M \omega \equiv \int_D \omega(\mathbf{g}(s, t) \left(\frac{\partial \mathbf{g}(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{g}(s, t)}{\partial t} \right)) ds dt. \quad (3.2.28)$$

Proposition 3.6. *Die Definition 3.2.28 ist parametrisierungsinvariant in dem Sinn, dass \mathbf{g} durch jede andere Parametrisierung, \mathbf{h} , ersetzt werden kann.*

Beweis. Der Beweis geht genauso wie im Fall der Definition des Flächeninhalts. \square

Es ist vielleicht nützlich, sich die Definition des Integrals einer Zweiform in Koordinatendarstellung explizit aufzuschreiben. Wenn ω_{ij} die Komponenten von ω sind, dann ist

$$\int_M \omega = \sum_{i < j} \int_D \omega_{ij}(\mathbf{g}(s,t)) (\partial_s g_i(s,t) \partial_t g_j(s,t) - \partial_t g_i(s,t) \partial_s g_j(s,t)) ds dt$$

wobei hier und in der Zukunft aus Übersichtlichkeitsgründen $\partial_s \equiv \frac{\partial}{\partial s}$ abkürzen.

Die Definition beinhaltet verschiedene Spezialfälle. Insbesondere können wir eine skalare Funktion, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, wie folgt integrieren:

$$\int_M f d\text{vol}_2 \equiv \int_M f \mathbf{o} \equiv \int_M f(\mathbf{g}(s,t)) \mathbf{o}(\mathbf{g}(s,t)) \left(\frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t} \right) ds dt. \quad (3.2.29)$$

3.2.3.1 Nochmal $d = 3$.

Im Fall $d = 3$ können wir nach dem was wir wissen den Integranden in Vektornotation wie folgt umschreiben:

$$\omega(\mathbf{g}(s,t)) \left(\frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t} \right) = \left\langle \omega(\mathbf{g}(s,t)), \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t} \right\rangle.$$

Nun ist $\frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}(s,t)}{\partial t}$ orthogonal zur Tangentialebene an M am Punkt $\mathbf{g}(s,t)$. Wir integrieren also die Projektion des Vektors $\omega(\mathbf{g}(s,t))$ auf den Normalenvektor, $\mathbf{n}(\mathbf{g}(s,t))$. Daher wird das Integral in diesem Fall auch suggestiv in der Form

$$\int_M \langle \omega, d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle$$

notiert.

3.2.4 Der Satz von Stokes

Wir kommen nun zu unserem wichtigsten Satz. Wir haben im Fall des Linienintegrals gesehen, dass sich das Integral einer exkten 1-Form explizit durch Randterme ausdrücken lässt. Wir wenden uns nun der Frage zu, was wir über das Oberflächenintegral sagen können, wenn wir über eine Differential-2-Form der Form $d\omega$ integrieren wenn ω eine 1-Form ist.

Um zu verstehen, was wir erwarten können, betrachten wir nochmal die Definition des Integrals. Für eine gegebene Parametrisierung, nimmt das Integral auf der Rechten Seite ja die Form $\int_D f(s,t) ds dt$. Wenn wir wollen können wir den Integranden statt als Funktion auch als Differential-2-Form, $f(s,t) ds \wedge dt$, interpretieren, da im \mathbb{R}^2 der Raum der 2-Formen und der Funktionen ja zusammenfällt. Betrachten wir also zunächst das Integral über 2-Formen im \mathbb{R}^2 . Sei τ eine Differential-1-Form (also ein 2-dim Vektor, dann ist

$$d\tau = (\partial_s \tau_2 - \partial_t \tau_1) ds \wedge dt. \quad (3.2.30)$$

Sei nun der Einfachheit halber D das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_D d\tau &= \int_0^1 \int_0^1 (\partial_s \tau_2(s,t) - \partial_t \tau_1(s,t)) ds dt \\ &= \int_0^1 (\tau_2(1,t) - \tau_2(0,t)) dt - \int_0^1 (\tau_1(s,1) - \tau_1(s,0)) ds \\ &= \int_{\gamma_1} \tau + \int_{\gamma_2} \tau + \int_{\gamma_3} \tau + \int_{\gamma_4} \tau = \int_{\partial D} \tau, \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

wobei ∂D den Rand des Würfels und die Liniensegment γ_i die vier Kanten des Würfels bezeichnen. Was wir hier benutzt haben ist natürlich die partielle Integration.

Sei nun ω eine Differential-1-Form auf einer orientierten Mannigfaltigkeit M . Sei \mathbf{g} eine Parametrisierung von M . Wir definieren eine 1-Form $\omega^\#$ auf D durch

$$\omega^\#(s,t) \equiv \langle \omega(\mathbf{g}(s,t)), \partial_s \mathbf{g}(s,t) \rangle ds + \langle \omega(\mathbf{g}(s,t)), \partial_t \mathbf{g}(s,t) \rangle dt. \quad (3.2.32)$$

Dann ist

$$d\omega^\# = (\partial_t \omega_1^\# - \partial_s \omega_2^\#) ds \wedge dt. \quad (3.2.33)$$

Aber

$$\partial_t \omega_1^\# = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \langle \omega(\mathbf{g}(s,t)), \partial_s \mathbf{g}(s,t) \rangle}{\partial g_j} \frac{\partial g_j(s,t)}{\partial t} \quad (3.2.34)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \omega_i(\mathbf{g}(s,t))}{\partial g_j} \partial_s g_i(s,t) \partial_t g_j(s,t) \quad (3.2.35)$$

Für den zweiten Term in (3.2.33) erhalten wir einen analogen Ausdruck, und in der Summe ergibt sich

$$\begin{aligned} d\omega^\# &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \omega_i(\mathbf{g}(s,t))}{\partial g_j} (\partial_s g_i \partial_t g_j - \partial_t g_i \partial_s g_j) \\ &= \sum_{i < j=1}^n \left(\frac{\partial \omega_i(\mathbf{g}(s,t))}{\partial g_j} - \frac{\partial \omega_j(\mathbf{g}(s,t))}{\partial g_i} \right) (\partial_s g_i \partial_t g_j - \partial_t g_i \partial_s g_j). \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Die linke Seite ist aber genau der Integrand im Ausdruck für $\int_M d\omega$, dass wir also gezeigt haben, dass

$$\int_D d\omega^\# = \int_M d\omega. \quad (3.2.37)$$

Jetzt benutzen wir (3.2.34) mit $\tau = \omega^\#$. Der Rand von M ist nun aber das Bild unter g des Randes des Quadrats, ist also zusammengesetzt aus den vier Kurven $\hat{\gamma}_i$, die jeweils durch $\mathbf{g}(s, 1)$, $\mathbf{g}(s, 0)$, $\mathbf{g}(0, t)$, respektive $\mathbf{g}(1, t)$ parametrisiert sind. Setzt man nun die entsprechenden Ausdrücke für $\omega^\#$ ein, so ergibt sich etwa

$$\int_{\gamma_1} \omega^\# = \int_0^1 \langle \omega(\mathbf{g}(1, t)), \partial_t \mathbf{g}(1, t) \rangle dt = \int_{\hat{\gamma}_1} \omega.$$

Setzen wir alles zusammen haben wir

$$\int_D d\omega^\# = \int_{\partial M} \omega, \quad (3.2.38)$$

und also endlich den *Satz von Stokes*:

Theorem 3.7. *Sei M eine orientierte Fläche und ∂M die (orientierte) Randkurve, die sich auch der Einschränkung einer Parametrisierung auf dem Rand von M ergibt. Sei ω eine stetig differenzierbare Differential-1-Form. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (3.2.39)$$

Anmerkung 3.8. Der Rand ∂M einer Fläche M muss im Allgemeinen keine C^1 -Kurve sein, sondern kann, wie etwa der Rand eines Quadrates, aus mehreren Stücken bestehen, die jeweils C^1 -Kurven sind. Unter dem Integral über ∂M verstehen wir dann die Summe der Integrale über die einzelnen Stücke.

3.2.4.1 Version 3d.

Wenn unsere Fläche im \mathbb{R}^3 liegt, so erhalten wir die "Vektorversion" des Satzes von Stokes:

Korollar 3.9. *Sei M eine Fläche im \mathbb{R}^3 , \mathbf{v} ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_M \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}), d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\partial M} \mathbf{v} \quad (3.2.40)$$

Beachte: In Koordinaten ausgeschrieben gibt es zwischen den Formeln (3.2.39) und (3.2.40) keinen Unterschied.

Anwendung. Eine der Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik lautet

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J}$$

wo der Vektor B das Magnetfeld und J die Stromdichte ist. Sei nun M eine Fläche im \mathbb{R}^3 mit Rand ∂M . Dann ist der totale Strom, der durch die Fläche fließt gleich

$$I_M = \int_M \langle J(\mathbf{x}), d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = \int_M \langle \text{rot} B, d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\partial M} B$$

wo wir im letzten Term B mit der 1-Form $B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz$ identifizieren.

Dieser Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld heisst *Ampère'sches Gesetz*. Gewissermassen schöner wäre es, das Magnetfeld B gleich als 1-Form aufzufassen und die Stromdichte als 2-Form. Dann lautet die Maxwell-Gleichung

$$dB = J$$

und wir haben sofort Ampères Gesetz in der eleganten Form

$$I_M = \int_M J = \int_{\partial M} B.$$

3.3 k -Formen und Integrale über Mannigfaltigkeiten

Wir haben uns lange mit dem wichtigen Fall der Oberflächenintegrale aufgehalten. Dafür haben wir es nun recht einfach, den Fall beliebig dimensionaler Mannigfaltigkeiten zu behandeln.

3.3.1 k -Formen.

In völlige Analogie zum vorherigen Fall definieren wir k -Formen als alternierende k -lineare Abbildungen $\text{on } (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$, die die Eigenschaft haben, dass sich beim Vertauschen zweier beliebiger Argumente das Vorzeichen ändert. Der Raum ist wieder ein Vektorraum den wir mit $(\mathbb{R}_k^n)^*$ bezeichnen. Es ist klar, dass dieser Raum nur für $k \leq n$ nicht-leer ist. Im Fall $k = n$ sind die möglichen Elemente gerade die Vielfachen der Determinante. Im allgemeinen ist die Dimension von $(\mathbb{R}_k^n)^*$ durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gegeben. Die Basiselemente können als $\mathbf{e}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ gewählt werden, wo $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ist. Wir werden in der Folge solche Tupel von Indizes mit \mathbf{i} etc. bezeichnen. Es gilt dann

$$\mathbf{e}^{i_1 \dots i_k}(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) h_{\sigma(i_1)} \dots h_{\sigma(i_k)}. \quad (3.3.1)$$

Hier läuft σ über alle Permutationen von k Elementen. $\text{sign}(\sigma)$ ist $+1$, falls σ durch eine gerade Anzahl von Transpositionen erhalten werden kann, und es ist -1 andernfalls.

Auf $(\mathbb{R}_k^n)^*$ definieren wir wieder eine *inneres Produkt*,

$$\langle \omega, \tau \rangle = \sum_{\mathbf{i}} \omega_{\mathbf{i}} \tau_{\mathbf{i}}. \quad (3.3.2)$$

Wir definieren das *äussere Produkt* als Abbildung von $(\mathbb{R}_k^n)^* \times (\mathbb{R}_\ell^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}_{k+\ell}^n)^*$ als follows:

(i) Wenn \mathbf{i}, \mathbf{j} wachsende k -, bzw. ℓ -Tupel sind, so setzen wir

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{e}^{\mathbf{j}} = \mathbf{e}^{\mathbf{ij}}. \quad (3.3.3)$$

(ii) Für Formen ω, τ setzen wir

$$\omega \wedge \tau = \sum_{\mathbf{ij}} \omega_{\mathbf{i}} \tau_{\mathbf{j}} \mathbf{e}^{\mathbf{ij}}. \quad (3.3.4)$$

Falls $r + \ell > n$ so ist das Produkt gleich Null.

Schliesslich gilt auch wieder, dass für alternierenden k -Formen ω ,

$$\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k) = \langle \omega, \eta^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}^k \rangle \quad (3.3.5)$$

gilt.

Im speziellen Fall $k = n$ sind alle n -Linearformen gerade von der Form

$$\mathbf{h} = v_{1,\dots,n} \mathbf{e}^{1\dots n} = v \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n,$$

und

$$\mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n) = v \det H,$$

wo H die $n \times n$ -Matrix ist, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ sind. Insbesondere gilt dann auch, dass

$$\mathbf{h}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}^n(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n) = (\det H)^2.$$

Mit demselben Argument wie im Fall $k = 2$ (geeignete Wahl der Basis), folgt daher auch, dass das k -dimensionale Volumen eines Parallelepipeds, das von den Vektoren $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k$ aufgespannt wird, gerade $|\mathbf{h}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}^k|$ ist.

3.3.2 Differential- k -Formen.

Wie gehabt können wir nun Abbildungen von $M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ als *Differential- k -Formen* definieren. Die Standardbasis sind wieder die Formen $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, für aufsteigende Folgen i_ℓ . Wieder definiert man die *äußere Ableitung* als Abbildung von den k -Formen zu den $k + 1$ -Formen durch

$$d\omega = \sum_{\mathbf{i}} d\omega_{\mathbf{i}} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (3.3.6)$$

Wieder gilt: $d(d\omega) = 0$. Wir sagen, dass eine r -Form exact ist, falls es eine $r - 1$ -Form τ gibt, so dass $\omega = d\tau$.

3.3.3 Integration von k -Formen.

Wir sind jetzt soweit, dass wir Integrale von k -Formen über k -dimensionale Mannigfaltigkeiten definieren können. Eigentlich können wir alles dadurch erhalten, dass wir überall 2 durch k ersetzen.

Mannigfaltigkeiten waren ja durch Parametrisierungen $\mathbf{g} : D \rightarrow M$ beschrieben, wo $D \subset \mathbb{R}^k$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ sind. Für eine Parametrisierung \mathbf{g} definieren wir jetzt die *Orientierung* als die k -Form

$$\mathbf{o}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \equiv \frac{\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_n}}{\left| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_n} \right|} \quad (3.3.7)$$

Absolut dieselben Argumente wie im Fall $k = 2$ zeigen, dass bis auf ein Vorzeichen, ω nicht von der Wahl von \mathbf{g} abhängt. Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist dann wieder die Äquivalenzklasse von Parametrisierungen, die ω invariant lassen.

Definition 3.10. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension k und ω eine Differential- k -Form die auf S definiert ist. Sei $\mathbf{g} : D \rightarrow M$ eine Parametrisierung der Mannigfaltigkeit M . Dann ist das Integral von ω über M gegeben durch

$$\int_M \omega \equiv \int_D \omega(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_k} \right) dt_1 \dots dt_k. \quad (3.3.8)$$

Insbesondere ist das k -dimensionale Volumen von M gegeben durch.

$$\begin{aligned} \text{vol}_k(M) &= \int_D \mathbf{o}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_k} \right) dt_1 \dots dt_k. \\ &= \equiv \int_D \left| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{t})}{\partial t_k} \right| dt_1 \dots dt_k. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Wenn $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion ist, so können wir auch das Integral von f über M definieren durch

$$\int_M f(\mathbf{x}) d\text{vol}(\mathbf{x}) \equiv \int_M f \mathbf{o}, \quad (3.3.10)$$

wo wir $f \mathbf{o}$ die k -Form ist, die wir erhalten, wenn wir die Orientierungsform punktweise mit der Funktion f multiplizieren, $(f \mathbf{o})(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}) \mathbf{o}(\mathbf{x})$.

Wie in den früheren Fällen prüft man nach, dass die so definierten Objekte nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängig sind.

3.3.4 Der Satz von Stokes

Mit ebenfalls den gleichen Argumenten wie im zweidimensionalen haben wir den allgemeinen Satz von Stokes:

Theorem 3.11. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension k im \mathbb{R}^n und ∂M der (orientierte) Rand von M , die sich auch der Einschränkung einer Parametrisierung auf dem Rand von M ergibt. Sei ω eine stetig differenzierbare Differential- $k-1$ Form. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (3.3.11)$$

3.3.5 Der Satz von Gauss.

Im Fall $k = n$ gibt es eine wichtige Spezialisierung des Satzes von Stokes der auch als Satz von Gauss, oder als das Divergenztheorem bekannt ist. Wie wir ja schon gesehen haben, ist das Integral über n -Formen wegen der Dualität n -Formen \leftrightarrow Funktionen dasselbe wie das Integral einer Funktion. Wir werden sehen, was uns der Satz von Stokes in diesem Kontext liefern kann.

3.3.5.1 Dualität.

Wir sehen, dass die Vektorräume $(\mathbb{R}^n_k)^*$ und $(\mathbb{R}^n_{n-k})^*$ die gleiche Dimension haben. In der Tat sind sie isomorph, und wir können jeder k -Form ω die *adjungierte* $n - k$ -Form $^*\omega$ zuordnen. Wir benötigen dies nur für den Fall $k = 1$, so dass wir uns auf diesen beschränken wollen. Wir setzen zunächst $^*i = \{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n\}$, und dann

$$^*e_i = (-1)^{i-1} e_i$$

Umgekehrt ist

$$^*e_{^*i} = (-1)^{i-1} e_i.$$

Die Wahl des Vorzeichens ist etwas willkürlich, sie wird so getroffen, dass gilt

$$e_i \wedge ^*e_i = e_{12\dots n} = e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Für eine allgemeine $n - 1$ -Form $\omega = \sum_i \omega_i e_{^*i}$ setzen wir dann

$$^*\omega = \sum_i \omega_i ^*e_{^*i} = \sum_i (-1)^{i-1} \omega_i e_i \equiv \sum_i ^*\omega_i e_i.$$

Wir sehen, dass dies genau die Zuordnung zwischen schiefssymmetrischen 3×3 -Matrizen und Vektoren ist, die wir bei der Diskussion des Kreuzprodukts vorgenommen hatten. Wichtig ist jetzt die folgende Beobachtung: Seien $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}$ linear unabhängige Vektoren. Dann ist

$$\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{n-1} (^*(\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{n-1})) = 0.$$

Das heißt, der Vektor $^*(\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{n-1})$ steht orthogonal auf der Hyperebene $n - 1$ Vektoren \mathbf{h}_i aufgespannt wird. Dies entspricht im Fall $n = 3$ der Tatsache, dass $\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2$ senkrecht auf den Vektoren \mathbf{h}_1 und \mathbf{h}_2 steht. Nun ist weiter aus der Definition sofort ersichtlich, dass wenn ω eine $n - 1$ -Form ist und τ eine 1-Form, dann

$$\langle ^*\omega, \tau \rangle = \sum_i ^*\omega_i \tau_i = \sum_i \omega_i \tau_i = \sum_i \omega_i (-1)^{i-1} ^*\tau_i = \langle \omega, ^*\tau \rangle.$$

Daraus folgt insbesondere dass, wenn ω eine 1-Form ist, und $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}$ Vektoren, dann gilt

$$*\omega(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}) = \langle *\omega, (\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{n-1}) \rangle = \langle \omega, (\mathbf{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{h}_{n-1}) \rangle. \quad (3.3.12)$$

Dieselbe Konstruktion können wir nun natürlich auch auf den Fall von Differentialformen übertragen. Das einzig neue, das wir nachrechnen müssen, ist das Verhältnis zur äusseren Ableitung.

Sei also ω eine Differential-1-Form und sei $*\omega$ die duale $n-1$ -Form. Wir wollen nun die äussere Ableitung von $*\omega$ ausrechnen.

$$*\omega = \sum_i *\omega_i \mathbf{e}_{*i} = \sum_i (-1)^{(i-1)} \omega_i \mathbf{e}_{*i}$$

also

$$\begin{aligned} d^* \omega(\mathbf{x}) &= \sum_i (-1)^{i-1} d\omega_i(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{e}_{*i} & (3.3.13) \\ &= \sum_i \frac{\partial \omega_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} v^i \wedge \mathbf{e}_{*i} \\ &= \sum_i \frac{\partial \omega_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\equiv \operatorname{div} \omega(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Das heisst: Wenn wir ein Vektorfeld (resp. eine Differential-1-Form nehmen, so entspricht die äussere Ableitung der dazu dualen $n-1$ -Form der Divergenz des Vektorfeldes. Nun können wir mit dieser Beobachtung in den Satz von Stokes eingehen. Der liefert

$$\int_M d^* \omega = \int_{\partial M} *\omega. \quad (3.3.14)$$

Andererseits ist aber

$$\int_M d^* \omega = \int_M \operatorname{div} \omega(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_M \operatorname{div} \omega(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n.$$

Für die rechte Seite der Gleichung (3.3.14) erhalten wir dagegen unter Verwendung von (3.3.12)

$$\int_{\partial M} *\omega = \int_D \langle \omega(\mathbf{g}(\mathbf{t})), *(\partial_{t_1} \mathbf{g}, \dots, \partial_{t_{n-1}} \mathbf{g}) \rangle dt_1 \dots dt_{n-1}$$

Da wir gesehen hatten, dass

$$*(\partial_{t_1} \mathbf{g}, \dots, \partial_{t_{n-1}} \mathbf{g}) \equiv \mathbf{n}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) |\partial_{t_1} \mathbf{g} \wedge \dots \wedge \partial_{t_{n-1}} \mathbf{g}|$$

der normierte Normalenvektor and die $n-1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, haben wir den *Satz von Gauss*:

Theorem 3.12. *Sei ω ein stetig Differenzierbares Vektorfeld, dass auf einem Gebiet $M \subset \mathbb{R}^d$ definiert ist. Sei ∂M der orientierte Rand von M . Dann gilt*

$$\int_{\partial M} \langle \omega(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\text{vol}(\mathbf{x}) = \int_M \text{div}(\omega(\mathbf{y})) dy_1 \dots dy_n \quad (3.3.15)$$

Anwendung. Auch der Satz von Gauss hat wichtige Anwendungen in der Elektrodynamik. Die erste Maxwell'sche Gleichung lautet nämlich

$$\text{div} E(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}),$$

wobei $E(\mathbf{x})$ das elektrische Feld am Punkt \mathbf{x} ist und $\rho(\mathbf{x})$ die elektrische Ladungsdichte ist. Betrachten wir nun ein Gebiet M im \mathbb{R}^3 , so ergibt die Anwendung des Gauss'schen Satzes

$$\int_M \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_M \text{div} E(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial M} \langle E(\mathbf{x}), d\mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle$$

Dies ist auch als Gauss'sches Gesetz in der Elektrostatik bekannt. Es besagt, dass die Gesamtladung in einem Gebiet gerade dem Integral der Projektion des elektrischen Feldes auf den Normalenvektor an der Oberfläche dieses Gebiets gleicht.

Wir können natürlich auch wieder in die Interpretation über Formen zurückgehen. Dann ist E eine 2-Form, und $\text{div} E$ entspricht d^*E . Die Maxwell-Gleichung ist dann

$$d^*E = \rho,$$

wo wir ρ eben auch als die 3-Form $\rho(x) dx \wedge dy \wedge dz$ ansehen können. Das Gauss'sche Gesetz sagt dann

$$\int_M \rho = \int_{\partial M} *E.$$

3.3.5.2 Die Green'schen Identitäten.

Zwei ebenfalls in der Elektrodynamik wichtige Spezialfälle des Satzes von Gauss sind die *Green'schen Identitäten*. Hier betrachten wir zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, ϕ, ψ die auf einem abgeschlossenen Gebiet $M \subset \mathbb{R}^3$ definiert sind. Sei $F(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x})$.

Nun ist

$$\text{div} F = \langle \nabla \psi, \nabla \phi \rangle + \psi \Delta \phi.$$

Daher liefert der Satz von Gauss die Aussage

$$\int_M (\langle \nabla \psi, \nabla \phi \rangle + \psi \Delta \phi) d\mathbf{x} = \int_{\partial M} \langle \psi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}), d\mathbf{n} \rangle. \quad (3.3.16)$$

Dies ist die *erste Green'sche Identität*.

Ein physikalisch wichtiger Spezialfall hiervon ist der Fall $\phi = \psi$ und ϕ löst die *Laplacegleichung* im Innern von M , mit vorgeschriebenen Randbedingungen auf ∂M . Das heisst

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \text{int}(M), \\ \phi(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial M.\end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\int_M \langle \nabla\phi, \nabla\phi \rangle d\mathbf{x} = \int_{\partial M} f(\mathbf{x}) \langle \nabla\phi(\mathbf{x}), d\mathbf{n} \rangle.$$

Physikalisch ist ϕ das elektrostatische Potential, das sich im Innern von M aufbaut, wenn man am Rand das Potential auf die Werte $u(\mathbf{x})$ festlegt (z.B. durch anlegen einer Batterie).

Die Grösse $\langle \nabla\phi(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle$ hat die physikalische Interpretation eine Oberflächenladung. Da $\nabla\phi = E$ ist, so ist die linke Seite der Gleichung die Energie des elektrischen Feldes in M , und unsere Identität erlaubt es, diese als Randterm zu schreiben

Durch Symmetrisierung bezüglich ψ und ϕ erhalten wir aus der ersten Green'schen Identität (3.3.16) die *zweite Green'sche Identität*,

$$\int_M (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi) d\mathbf{x} = \int_{\partial M} \langle \psi(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})\nabla\psi(\mathbf{x}), d\mathbf{n} \rangle. \quad (3.3.17)$$

Kapitel 4

Hilberträume, Basen, Fouriertransformation

In diesem Kapitel greifen wir die Untersuchung von Hilberträumen wieder auf. Unser besonderes Interesse gilt jetzt den sog. vollständigen Orthogonalsystemen, die bei der Lösung von Differentialgleichungen eine wichtige Rolle spielen. Eine Quelle für viel detaillierteres Material ist die Reihe der Lehrbücher zur Funktionalanalysis von Reed und Simon [4].

4.1 Hilberträume

Wir beginnen mit ein paar abstrakten Begriffen, die wir später brauchen werden. Zunächst müssen führen wir die Konzepte von Metrik und Konvergenz in einem allgemeinen Kontext ein.

4.1.0.3 Metrische Räume, Skalarprodukte, Hilberträume

Definition 4.1. Ein *metrischer Raum* ist eine Menge, M , und eine Abbildung, $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften hat:

- (i) $d(x, y) \geq 0$;
- (ii) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, für alle $x, y, z \in M$;

Die Abbildung d heisst *Metrik*.

Klarerweise sind die reellen Zahlen mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ein metrischer Raum, aber auch die rationalen Zahlen mit derselben Metrik. Was ist der Unterschied?

Auf einem metrischen Raum kann man Konvergenz untersuchen.

Definition 4.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Wir sagen, dass eine Folge von Elementen $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, zu dem Element $x \in M$ konvergiert, genau dann, wenn $d(x_n, x)$ nach Null konvergiert.

Definition 4.3. Eine Folge von Elementen x_n , $n \in \mathbb{N}$, heisst *Cauchyfolge*, genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$, eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass für alle $n, m > n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Bei einer Cauchyfolge bleiben also alle Folgenglieder nach und nach sehr nahe beisammen. Offensichtlich sind alle konvergenten Folgen Cauchyfolgen. Man würde auch erwarten, dass Cauchyfolgen konvergieren. Dies ist in der Tat der Fall für den metrischen Raum \mathbb{R} , nicht aber für den metrischen Raum \mathbb{Q} : eine Folge von rationalen Zahlen, die gegen die Zahl π konvergiert, hat ja in \mathbb{Q} keinen Grenzwert. Man sagt, dass \mathbb{Q} nicht vollständig ist.

Definition 4.4. Ein metrischer Raum (M, d) heisst vollständig, wenn jede Cauchyfolge in M konvergiert.

Die rationalen Zahlen haben eine wichtige Eigenschaft: man kann jede reelle Zahl durch rationale Zahlen beliebig gut approximieren, anders gesagt, jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen. Dieses Konzept kann man verallgemeinern.

Definition 4.5. Eine Menge $B \subset M$ in einem metrischen Raum (M, d) heisst *dicht*, genau dann wenn jedes Element von M der Grenzwert einer Folge von Elementen von B ist.

Eine wichtige Tatsache ist, dass wir jeden metrischen Raum (M, d) durch hinzufügen aller möglichen Grenzwerte von Cauchyfolgen zu einem vollständigen metrischen Raum erweitern können.

Die Struktur der reellen Zahlen als vollständigem metrischem Raum, der die Vervollständigung eines abzählbaren Raumes \mathbb{Q} ist, lässt sich auch auf allgemeine metrische Räume übertragen.

Definition 4.6. Ein metrischer Raum (M, d) heisst *separabel*, genau dann, wenn es eine abzählbare Teilmenge $B \subset M$ gibt, so dass B dicht ist.

Ein wichtiges Beispiel für metrische Räume sind Vektorräume, die mit einem Skalarprodukt ausgestattet sind.

Definition 4.7. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} (oder \mathbb{C}). Eine bilineare Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, heisst Skalarprodukt, wenn

- (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
- (ii) $\langle x, x \rangle \equiv \|x\|^2 \geq 0$, und $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann wenn $x = 0$;

Ein Skalarprodukt induziert eine Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, und eine Metrik,

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|.$$

Definition 4.8. Ein Vektorraum V mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ der bezüglich der durch dieses induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist, heisst ein *Hilbertraum*.

Die von uns in früheren Kapiteln betrachteten L^2 -Räume sind Hilberträume, wenn wir ihre Elemente als Äquivalenzklassen interpretieren (d.h. $f \equiv g$, wenn $\|f - g\|_{2,\mu} = 0$).

4.1.1 Basen

Wir haben bereits gesehen, wie wir mittels des Gram-Schmidt Verfahrens Familien von orthonormalen Elementen generieren können. Im Fall eines endlichdimensionalen Vektorraums liefern uns diese ja Basisvektoren, mittels derer wir jedes Element in einer Koordinatendarstellung angeben können. Wir werden nun sehen, dass gleiches im wesentlichen auch in Hilberträumen gilt.

Wir müssen zunächst eine etwas umständliche wirkende Definition einer Basis geben.

Definition 4.9. Eine Menge S von orthonormalen Elementen in einem Hilbertraum H heisst eine *Basis*, wenn es keine andere Menge S' von orthonormalen Elementen gibt, in der S strikt enthalten ist.

Theorem 4.10. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Basis. Jeder separable Hilbertraum besitzt eine abzählbare Basis, die durch das Gram-Schmidt Verfahren gewonnen werden kann.*

Entscheidend ist der folgende Darstellungssatz:

Theorem 4.11. *Sei H ein Hilbertraum und $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Basis. Dann gilt für jeden $y \in H$,*

$$y = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, y \rangle x_\alpha, \quad (4.1.1)$$

und

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x_\alpha, y \rangle|^2. \quad (4.1.2)$$

Beweis. Wir betrachten nur den separablen Fall, wo wir $A = \mathbb{N}$ annehmen können. Eine elementare Rechnung zeigt, dass für jedes x_α ,

$$|\langle x_\alpha, y \rangle|^2 \leq \|y\|^2,$$

und ebenso für jede endliche Teilmenge $A' \subset A$,

$$\sum_{\alpha \in A'} |\langle x_\alpha, y \rangle|^2 \leq \|y\|^2. \quad (4.1.3)$$

Jetzt ist aber

$$\sum_{\alpha=1}^N |\langle x_\alpha, y \rangle|^2$$

monoton wachsend in N , und beschränkt. Daher konvergiert diese Folge. Sei jetzt

$$y_n = \sum_{\alpha=1}^n \langle x_\alpha, y \rangle x_\alpha.$$

Dann gilt, für $n > m$,

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{\alpha=m+1}^n \langle x_\alpha, y \rangle x_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha=m+1}^n |\langle y, x_\alpha \rangle x_\alpha|^2.$$

Damit ist aber y_n eine Cauchyfolge und muss, wegen der Vollständigkeit, konvergieren. Sei $y' = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Dann sieht man sofort, dass für jedes α' ,

$$\langle y - y', x_{\alpha'} \rangle = \langle y, x_{\alpha'} \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^n \langle y, x_\alpha \rangle \langle x_\alpha, x_{\alpha'} \rangle = \langle y, x_{\alpha'} \rangle - \langle y, x_{\alpha'} \rangle = 0.$$

Daher ist $y - y'$ zu allen Elementen der Basis S orthogonal, und falls $y - y' \neq 0$, könnten wir die Menge $S \cup \{y - y'\}$ bilden, die alle orthogonal wären und S strikt enthält. Das wäre ein Widerspruch zur Basiseigenschaft von S . Die zweite Eigenschaft folgt durch einfaches Nachrechnen. \square

Diese abstrakten Resultate sagen uns im wesentlichen, dass wir immer eine Basis konstruieren können. Allerdings wissen wir nicht ohne weiteres, wie wir das im konkreten Fall machen sollen.

4.1.2 Fourierreihen

Als erstes und sehr wichtiges Beispiel wollen wir den Hilbertraum $L^2([0, 2\pi], dx)$ betrachten, den Raum der quadratintegrablen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Wir betrachten der Bequemlichkeit Funktionen mit Werten in den komplexen Zahlen, und definieren

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x)g(x)dx.$$

Dabei ist für eine komplexe Zahl $z = x + iy$, $z^* \equiv x - iy$, wobei jeweils $x, y \in \mathbb{R}$ sind. Ein wichtiges Orthonormalsystem sind hier die Funktionen

$$e_n(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}.$$

Die komplexe Exponentialfunktion e^{ix} ist, für $x \in \mathbb{R}$, gegeben durch

$$e^{ix} \equiv \cos x + i \sin x.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((m-n)x) + i \sin((n-m)x)) dx = \delta_{m,n} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Wir könnten also vermuten, dass wir jede Funktion in unserem Raum schreiben können als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e_n(x), \quad (4.1.5)$$

wo

$$\hat{f}_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Anmerkung 4.12. Wenn f nur reelle Werte annimmt, dann ist offenbar

$$\hat{f}_{-n}(x) = \hat{f}_n^*(x),$$

(wo z^* gegeben ist durch $a - ib$, wenn $z = a + ib$, mit $a, b \in \mathbb{R}$). Damit können wir die Fourierreihe für reelle Funktionen auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

wobei $a_0 = \hat{f}_0$, $b_n = 0$, and for $n \geq 1$, $a_n = \hat{f}_n + \hat{f}_n^*$, $b_n = i(\hat{f}_n^* - \hat{f}_n)$ gilt.

Dabei ist die Darstellung (4.1.5) als konvergente Reihe zu verstehen. Wir müssten also zeigen, dass in der Tat

$$S_N(f) \equiv \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e_n(x) \rightarrow f(x), \quad (4.1.6)$$

gilt, und zwar im Sinne der Konvergenz in der L^2 -Norm. Was man nun zunächst tut, ist stattdessen gleichmässige Konvergenz für stetig differenzierbare Funktionen zu zeigen, und dann zu benutzen, dass diese dicht in L^2 liegen. Auch das ist recht trickreich.

Als erstes drücken wir $S_N(f)$ anders aus, indem wir Summe und Integral vertauschen.

$$\begin{aligned}
S_N(f) &= \sum_{n=-N}^N e^{inx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iny} f(y) dy & (4.1.7) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+z) \sum_{n=-N}^N e^{-inz} dz.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{n=-N}^N e^{-inz} = \sum_{n=0}^N (e^{inz} + e^{-inz}) - 1 = \frac{e^{-i(N+1)z}}{1 - e^{-iz}} + \frac{e^{i(N+1)z}}{1 - e^{iz}} - 1 = \frac{\sin((N+1/2)z)}{\sin z/2}.$$

Der letzte Schritt ist dabei eine etwas längliche Herumrechnerei unter Benutzung der Additionstheoreme für den Kosinus.

Nunmehr mitteln wir zunächst über N : Wir setzen

$$\Sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_N(f).$$

Auch das können wir explizit ausrechnen:

$$\Sigma_N(f) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_0^{2\pi} f(x+z) \frac{\sin^2((N+1/2)z)}{\sin^2 z/2} dz \quad (4.1.8)$$

Schön ist jetzt, dass die Funktionen

$$\frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\sin^2((N+1/2)z)}{\sin^2 z/2}$$

eine Dirac-Folge bilden. Dies sieht man wie folgt: zunächst ist für $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$\frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\sin^2((N+1/2)z)}{\sin^2 z/2} \leq C_\delta/N,$$

wobei $C_\delta = \frac{1}{2\pi \sin^2(\delta/2)}$ gewählt werden kann. Damit strebt dieser Ausdruck nach null. Andererseits ist leicht zu sehen, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\sin^2((N+1/2)z)}{\sin^2 z/2} dz = 1. \quad (4.1.9)$$

Dies können wir zeigen, ohne überhaupt rechnen zu müssen. Dieser Ausdruck ist nämlich gerade gleich $\Sigma_N(1)$. Es ist aber $S_N(1) = 1$, und somit auch $\Sigma_N(1) = 1$. Hieraus folgt nun, dass für alle stetigen Funktionen f

$$\lim_{N \uparrow \infty} \Sigma_N(f)(x) = f(x),$$

für jedes $x \in (0, 2\pi)$, und für periodische stetige Funktionen (d.h. $f(0) = f(2\pi)$), ist die Konvergenz sogar gleichmässig. Nun hatten wir aber im Beweis des Satzes 4.11 gesehen, dass $\|f - S_N(f)\|_2$ monoton fallend ist. Daher gilt insbesondere, dass

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - \Sigma_N(f)\|_2$$

und da letzteres ja für stetige Funktionen punktweise konvergiert, konvergiert für diesen Fall $S_N(f)$ in L^2 gegen f .

Wenn wir noch mehr Regularität für f haben, können wir noch stärkere Konvergenzeigenschaften zeigen. Sei also $f \in C^1[0, 2\pi]$ und periodisch. Wir setzen $\hat{f}'_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx$. Nun gilt wegen der Gleichung (4.1.3),

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx < \infty,$$

da ja f stetig differenzierbar ist. Andererseits kann man mit partieller Integration zeigen, dass

$$|\hat{f}'_n|^2 = n^2 |\hat{f}_n|^2,$$

so dass also auch $\sum_n n^2 |\hat{f}_n|^2 < \infty$. Schliesslich ist wegen der Cauchy-Schwartz Ungleichung

$$\sum_n |\hat{f}_n| \leq \sum_n n^{-1} n |\hat{f}_n| \leq \sqrt{\sum_n n^{-2} \sum_n n^2 |\hat{f}_n|^2} < \infty.$$

Dies wiederum erlaubt uns zu schliessen, dass die Partialsummen

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{inx}$$

gleichmässig in $[0, 2\pi]$ gegen eine Funktion g konvergieren. Die Funktion ist dann notwendig stetig (gleichmässige Grenzwerte von Folgen von stetigen Funktionen sind stetig, andererseits wissen wir, dass $S_N(f)$ in L^2 gegen f konvergiert. Also haben wir

$$\|S_N(f) - f\|_2 = \|S_N(f) - g + g - f\|_2 \geq -\|S_N(f) - g\|_2 + \|f - g\|_2.$$

Beide Terme, die S_N involvieren konvergieren gegen Null, und so erhalten wir

$$\|f - g\|_2 \leq 0,$$

weswegen zunächst $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in [0, 2\pi]$ gilt. Da aber sowohl f wie g stetig sind, gilt die Gleichheit überall. Wir haben also gezeigt:

Theorem 4.13. *Sei f periodisch und stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{inx}$ gleichmässig gegen $f(x)$.*

Nun kann man sich davon überzeugen, dass jede Funktion in L^2 im L^2 -Sinn beliebig gut durch eine periodische stetig differenzierbare Funktion approximiert werden kann: die periodischen Funktionen in $C^1[0, 2\pi]$ bilden eine dichte Teilmenge von $L^2([0, 2\pi])$. Dann folgt aus dem vorherigen Satz:

Theorem 4.14. *Sei $f \in L^2([0, 2\pi])$. Dann konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{inx}$ in der L^2 -Norm gegen f .*

Beweis. Der Beweis folgt einem typischen Schema, das man sich merken sollte. Nach dem was wir gerade gesagt haben, gibt es für jedes $f \in L^2([0, \pi])$ eine Folge von periodischen Funktionen, g_n , in $C^1([0, 2\pi])$, so dass

$$\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|S_N(f) - f\|_2 &= \|S_N(f) - S_N(g_n) + S_N(g_n) - g_n + g_n - f\|_2 \\ &\leq \|S_N(f) - S_N(g_n)\|_2 + \|S_N(g_n) - g_n\|_2 + \|g_n - f\|_2. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Nun ist aber wegen (4.1.3)

$$\begin{aligned} \|S_N(f) - S_N(g_n)\|_2^2 &= \int \left| \sum_{k=-N}^N \langle e_k, f - g_n \rangle e_k(x) \right|^2 dx \\ &= \sum_{k,m=-N}^N \int \langle e_k, f - g_n \rangle^* e_k^*(x) \langle e_m, f - g_n \rangle e_m(x) dx \\ &= \sum_{k=-N}^N |\langle e_k, f - g_n \rangle|^2 \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(x) - g_n(x)|^2 dx \downarrow 0, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

wenn $n \uparrow \infty$, gleichmässig in N . Nach dem Satz 4.13 konvergiert für jedes n , $S_N(g_n) - g_n$ gegen Null, und letztlich konvergiert auch der letzte Term in (4.1.10) nach Voraussetzung gegen Null. Damit konvergiert aber die linke Seite von (4.1.10) gegen Null: Für jedes $\varepsilon > 0$, können wir nämlich ein n finden, so dass die Terme (I) und (III) kleiner sind als $\varepsilon/3$, egal welchen Wert N annimmt. Dann finden wir für dieses n ein N_0 ; so dass für alle $N \geq N_0$, der zweite Term ebenfalls kleiner $\varepsilon/3$ ist. Dann aber ist für alle diese N die linke Seite kleiner als ε , und wir sind fertig. \square

4.1.3 Anwendung. Lineare Differentialgleichung

Eine wichtige Anwendung der Fourierreihen sind die Lösungen von linearen Differentialgleichungen. Wir betrachten ein einige einfache Beispiele.

4.1.3.1 Periodische Saite

Wir untersuchen die folgende Differentialgleichung

$$-f''(x) = \lambda f(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (4.1.12)$$

mit *periodischen Randbedingungen*, d.h. wir suchen Lösungen mit der Eigenschaft, dass

$$f(x) = f(x + 2\pi). \quad (4.1.13)$$

Da wir schon wissen, dass sich jede periodische Funktion als Fourierreihe darstellen lässt, setzen wir $f(x) = \sum_n \hat{f}_n e_n(x)$ an.

Nun ist aber $e_n''(x) = -n^2 e_n(x)$. Daher erhalten wir die Gleichung

$$\sum_n (n^2 - \lambda) \hat{f}_n e_n(x) = 0 \quad (4.1.14)$$

Die Gleichung (4.1.14) hat nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn wenigstens einer der Terme $(n^2 - \lambda)$ gleich Null ist. Dies ist der Fall wenn $\lambda = k^2$, und zwar für $n = \pm k$. Die Periodizitätsbedingung ist automatisch gegeben, da diese ja für alle $e_n(x)$ erfüllt ist.

Für diesen Fall ist dann die Lösung, die auch (4.1.13) erfüllt

$$\hat{f}_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq \pm k \\ c, & \text{falls } n = k \\ b, & \text{falls } n = -k, \end{cases}$$

wo c, b eine beliebige Konstanten sind.

Die Werte, $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$ heissen *Eigenwerte* des Randwertproblems (4.1.13). Die Funktionen $e_k(x)$ sind die zugehörigen *Eigenfunktionen*. Wir sehen, dass wenn λ einen solchen Wert annimmt, (4.1.13) eine zwei-dimensionale Schar von Lösungen existiert, die die Form

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

hat.

Sei nun g eine periodische Funktion auf $[0, 2\pi]$. Wir betrachten nun das inhomogene Problem

$$\begin{aligned} -f''(x) - \lambda f(x) &= g(x), \quad x \in (0, 2\pi), \\ f(x) &= f(x + 2\pi) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Mittels der Fourierdarstellung erhalten wir

$$\sum_n (n^2 - \lambda) \hat{f}_n e_n(x) = \sum_n \hat{g}_n e_n(x). \quad (4.1.16)$$

Damit dies für alle x gilt, muss für alle n ,

$$(n^2 - \lambda)\hat{f}_n = \hat{g}_n \quad (4.1.17)$$

gelten. D.h. wir erhalten für alle n , für die $n^2 \neq \lambda$,

$$\hat{f}_n = \frac{\hat{g}_n}{n^2 - \lambda}.$$

Falls λ nicht von der Form $\lambda = k^2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist, haben wir also eine Lösung

$$f(x) = \sum_n \frac{\hat{g}_n}{n^2 - \lambda} e_n(x). \quad (4.1.18)$$

Die Periodizitätsbedingung ist wieder automatisch erfüllt.

Wenn wir den Fourierkoeffizienten \hat{g}_n explizit ausschreiben, nimmt (4.1.18) die folgenden interessante Form an:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n \int_0^{2\pi} e_n(y)^* g(y) dy \frac{1}{n^2 - \lambda} e_n(x) \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_n \frac{e_n(y)^* e_n(x)}{n^2 - \lambda} g(y) dy \\ &\equiv \int_0^{2\pi} G_\lambda(x, y) g(y) dy. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Die Funktion

$$G_\lambda(x, y) \equiv \sum_n \frac{e_n(y)^* e_n(x)}{n^2 - \lambda}$$

heißt *Green'sche Funktion*. Sie entspricht formal der Lösung der Gleichung (4.1.15) wenn wir für $g(x)$ die Dirac-Funktion $\delta(x - y)$ einsetzen.

4.1.3.2 Dirichletproblem.

Wir betrachten nun eine Variante des vorherigen Problems in dem wir nun Randwerte an den Stellen 0 und π festlegen, d.h. wir untersuchen die Gleichungen

$$\begin{aligned} -f''(x) - \lambda f(x) &= g(x), \quad x \in (0, \pi), \\ f(0) &= f(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Beachte, dass wir zwar nicht fordern, dass die Lösung die Differentialgleichung (4.1.20) auch an den Punkten 0 und π erfüllt, wir wollen aber, dass f dort stetig ist. Ansonsten hätte die Randbedingung ja gar keinen Effekt. Zunächst schauen wir uns wieder den Fall $g(x) \equiv 0$ an. Wie zuvor sehen wir, dass Lösungen existieren, wenn $\lambda = k^2$ ist. Allerdings gibt es für den Fall $k = 0$ jetzt nur die triviale Lösung $f(x) = 0$. Ausserdem implizieren die Randbedingungen nunmehr für den Fall $\lambda = k^2$,

$k \in \mathbb{N}$, dass

$$f_k(x) \equiv ce_k(x) + be_{-k}(x)$$

für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet. Die erste Bedingung impliziert $b = -c$, während die zweite Bedingung, $f_k(\pi) = 0$, dann zu

$$e_k(\pi) - e_{-k}(\pi) = \cos \pi - \cos(-\pi) + i(\sin \pi - \sin(-\pi)) = 0,$$

wird, was automatisch erfüllt ist. In diesem Fall gibt es daher zu jedem Eigenwert nur eine ein-dimensionale Schar von Eigenfunktionen existiert, nämlich die Vielfachen von

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx).$$

Die Funktion ϕ_k , $k \in \mathbb{N}$ (ohne die Null!!) sind orthomormal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\pi u(x)v(x)dx$$

und bilden wieder eine Basis.

Anmerkung 4.15. Beachte, dass die Funktionen $\sin(kx)$ für ungerade k nicht periodisch mit Periode π sind. Man könnte versucht sein, als Basis die periodischen Funktionen $e^{i2k\pi}$ zu wählen. Nach dem, was wir wissen, können wir damit auch alle Funktionen auf unserem Intervall approximieren, allerdings nur im L^2 -Sinn. Punktweise werden die entsprechenden Fourierreihen nicht konvergieren. Insbesondere verpassen wir damit die Hälfte der Eigenwerte unserer Gleichung. Das korrekte Vorgehen erfordert die Bestimmung aller Eigenwerte und Eigenfunktionen des homogenen Randwertproblems. Zum Beispiel ist ja klar, dass $\sin(x)$ eine Lösung der Randwertproblems ist. Diese ist aber nicht periodisch mit Periode π . Man kann nun die Fourierkoeffizienten bezüglich der L^2 -Basis e^{i2kx} berechnen und findet $\frac{1}{4k^2-1}$. Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4k^2-1} e^{i2kx}$ ist sogar noch konvergent, aber schon ihre Ableitung konvergiert nicht mehr. Daher ist diese Reihendarstellung für die Lösung des Randwertproblems nicht nützlich.

Um das allgemeine (inhomogene) Problem (4.1.20) zu lösen, setzen wir $\hat{g}_k \equiv \int_0^\pi \phi_k(x)g(x)dx$, und erhalten die Gleichungen

$$(n^2 - \lambda)\hat{f}_n = \hat{g}_n,$$

und also die gewünschte Lösung als

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{g}_n}{n^2 - \lambda} \phi_n(x).$$

Auch hier könne wir die Lösung wieder in der Form

$$f(x) = \int_0^\pi G_\lambda(x,y)g(y)dy$$

schreiben, wobei diesmal

$$G_\lambda(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(x)\phi(y)}{n^2 - \lambda}$$

eine Darstellung der Green'schen Funktion für unser Randwertproblem (4.1.20) ist. Interessant ist hier z.B. der Fall $\lambda = 0$. Sei z.B. $g(x) = 1$. Dann ist

$$\hat{g}_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 2m \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2/n, & \text{if } n = 2m - 1. \end{cases}$$

Andererseits ist die einzige Lösung der Gleichung $-f'' = 1$ mit den gegebenen Randbedingungen

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}x.$$

Daher erhalten wir die Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin((2m-1)x)}{\pi(2m-1)^3} = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}.$$

Insbesondere folgt daraus mit $x = \pi/2$, die Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin((m-1/2)\pi) \frac{1}{(2m-1)^3} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{(2m-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

4.1.3.3 Die Wärmeleitungsgleichung.

Eine Anwendung des oben diskutierten Eigenwertproblems stellt z.B. die sog. Wärmeleitungsgleichung dar. Für den Fall eines eindimensionalen Objekts lautet diese

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad x \in (0, \pi), t > 0; \quad (4.1.21)$$

mit Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ und Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$. Eine Gleichung, die Ableitungen bezüglich mehrerer Variablen enthält, nennt man eine partielle Differentialgleichung. Wesentliche Teile der Physik betreffen die Untersuchung partieller Differentialgleichungen.

Um diese Gleichung zu lösen, machen wir zunächst einen Produktansatz. Wir suchen nach einer Lösung in der Form $u(x, t) = f(x)g(t)$. Eingesetzt liefert das die Gleichung

$$g'(t) = g(t) \frac{f''(x)}{f(x)},$$

wobei f die Randbedingungen $f(0) = f(\pi) = 0$ erfüllen muss. Für g ergibt sich damit die Exponentialfunktion als einzige nicht-triviale Lösung, d.h.

$$g(t) = A e^{\frac{f''(x)}{f(x)}t}.$$

Damit diese Lösung nicht von x abhängt, muss aber

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda$$

gelten, wo λ eine Konstante ist. Damit sind wir aber für f bei dem Problem von oben. Wir wissen, dass alle möglichen Lösungen von der Form sind

$$f(x) = c_k \phi_k(x) = c_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx),$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Damit haben wir eine unendliche Schar von Lösungen, die alle die Differentialgleichung und die Randbedingung lösen. Dies tun auch alle Linearkombinationen dieser Lösungen. Die allgemeine Lösung, die noch nicht die Anfangsbedingung erfüllt, ist somit

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \phi_k(x).$$

Die Anfangsbedingung wird nun zu der Forderung

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(xk).$$

Diese führt dazu, dass die Koeffizienten c_k gerade die Fourierkoeffizienten von u_0 sein müssen, also

$$c_k = \int_0^{\pi} u_0(x) \phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx).$$

Damit haben wir die gewünschte Lösung gefunden.

In ähnlicher Weise kann man auch zahlreiche andere partielle Differentialgleichungen lösen, etwa die Wellengleichung $\partial_t^2 u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$ oder die Schrödingergleichung $i\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$.

4.1.3.4 Hermite Polynome

Im Kapitel 1 hatten wir bereits gesehen, dass die Hermite Polynome ein orthonormales Funktionensystem im Raum $L^2(\mathbb{R}, (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx)$ bilden. Tatsächlich bilden sie sogar eine Basis dieses Hilbertraums. Der Beweis gründet sich auf einem tiefen Satz der Analysis, dem Satz von Stone-Weierstrass:

Theorem 4.16. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom, p_n , so dass*

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon. \quad (4.1.22)$$

Aus diesem Satz folgt wie im Fall der Fourierreihen, dass die normierten Hermite Polynome,

$$h_n(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(x), \quad (4.1.23)$$

wo H_n in (1.3.16) gegeben ist, eine orthonormale Basis dieses Hilbertraums bilden.

Auch die Hermite Polynome spielen eine wichtige Rolle für gewisse Differentialgleichungen, in der Physik insbesondere in der Quantenmechanik des Harmonischen Oszillators. Dazu müssen wir etwas ausholen.

Zunächst beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.17. *Die Funktionen H_n erfüllen die Differentialgleichung*

$$e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} \frac{d}{dx} H_n(x) \right) = -nH_n(x). \quad (4.1.24)$$

Beweis. Zunächst einmal sieht man leicht, dass

$$H'_n(x) = xH_n - H_{n+1} \quad (4.1.25)$$

gilt. Als nächstes sehen wir durch einsetzen, dass

$$\begin{aligned} e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} \frac{d}{dx} H_n(x) \right) & \\ = e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} (xH_n(x) - H_{n+1}) \right) & \\ = -xH_{n+1}(x) + H_n(x) + H_{n+2}(x). & \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass

$$\int H_m(x) (-xH_{n+1}(x) + H_n(x) + H_{n+2}(x)) e^{-x^2/2} dx = -\delta_{mn} n \sqrt{2\pi} n! \quad (4.1.27)$$

ist. Dann ist nämlich das Lemma bewiesen. Nun ist aber mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int H_m(x) x H_{n+1}(x) e^{-x^2/2} dx &= \int (H'_m(x) H_{n+1}(x) + H_m(x) H'_{n+1}(x)) e^{-x^2/2} dx \\ &= \int (2xH_m(x) H_{n+1}(x) - H_{m+1}(x) H_{n+1}(x) - H_m(x) H_{n+2}(x)) e^{-x^2/2} dx \\ &= 2 \int H_m(x) x H_{n+1}(x) e^{-x^2/2} dx - \delta_{nm} \sqrt{2\pi} (n+1)! - \delta_{m,n+2} \sqrt{2\pi} (n+2)!. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Aufgelöst gibt das

$$\int H_m(x) x H_{n+1}(x) e^{-x^2/2} dx = \delta_{nm} \sqrt{2\pi} (n+1)! + \delta_{m,n+2} \sqrt{2\pi} (n+2)!. \quad (4.1.29)$$

Setzen wir dieses Ergebnis ein folgt

$$\begin{aligned} & \int H_m(x) (-xH_{n+1}(x) + H_n(x) + H_{n+2}(x)) e^{-x^2/2} dx \\ &= -\delta_{m,n} \sqrt{2\pi} ((n+1)! - n!) - \delta_{m,n+2} \sqrt{2\pi} ((n+2)! - (n+2)!) = -n\delta_{m,n} \sqrt{2\pi} n!, \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

wie behauptet. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Als nächstes definieren wir die Funktionen

$$\phi_n(x) \equiv e^{-x^2/4} H_n(x). \quad (4.1.31)$$

Durch eine einfache aber längere Rechnung sehen wir, dass diese folgende Gleichung erfüllen:

$$-\phi_n''(x) + \frac{1}{2}x^2\phi_n(x) = (n+1/2)\phi_n(x). \quad (4.1.32)$$

Ausserdem gilt natürlich, dass

$$\int \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{mn} \sqrt{2\pi} n!. \quad (4.1.33)$$

Das heisst, die ϕ_n sind orthogonale Elemente in dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Wenn wir diese noch normieren, bilden sie sogar wieder eine Orthonormalbasis in diesem Raum. Andererseits sind sie Eigenfunktionen des Eigenwertproblems

$$-f''(x) + \frac{1}{2}x^2 f(x) = \lambda f(x)$$

mit der Forderung, dass die Lösung ein Element von $L^2(\mathbb{R}, dx)$ ist. Wegen der Vollständigkeit sehen wir, dass die Zahlen $\lambda = (n+1/2)$ gerade alle möglichen Eigenwerte dieses Problems sind. In der Quantenmechanik entspricht nennt man den Differentialoperator

$$H \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2$$

den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators in einer Dimension. Die Differentialgleichung schreibt man dann in der Form

$$Hf(x) = \lambda f(x). \quad (4.1.34)$$

Auch hier in der Quantenmechanik ist die Lösung des Eigenwertproblems Mittel zum Zweck. Die eigentliche Dynamik eines quantenmechanischen Systems ist durch die sog. *zeitabhängige Schrödingergleichung* beschrieben, die hier die Form

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t), \quad (4.1.35)$$

hat. Die komplexe Lösung heisst die quantenmechanische *Wellenfuntion*. Um die Gleichung zu lösen, macht man einen Produktansatz

$$\psi(x, t) = f(t)\phi(x).$$

Ganz wie im Beispiel der Wärmeleitungsgleichung findet man, dass ϕ die Eigenwertgleichung (4.1.34) lösen muss, und dann für einen gegebenen Eigenwert, λ ,

$$f(t) = f_\lambda(t) = e^{-i\lambda t}.$$

Mit den bekannten Eigenwerten und Eigenfunktionen kann man dann für den harmonischen Oszillator die allgemeine Lösung

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(n+1/2)t} e^{-x^2/4} H_n(x),$$

mit Konstanten c_n , die durch die Anfangsbedingung

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x)$$

festgelegt werden.

4.1.3.5 Legendre Polynome und die Laplace Gleichung.

Eine wichtige Anwendung orthogonaler Polynome ist die Laplace Gleichung,

$$\Delta f(\mathbf{x}) = 0 \tag{4.1.36}$$

mit geeigneten Randbedingungen. Häufig sind Randbedingungen am einfachsten in sphärischen Polarkoordinaten gegeben, etwa

$$f(R, \theta, \phi) = v(\theta)$$

für einen gegebene Wert von R . Physikalisch entspricht dieses dem Problem, das elektrostatische Potential im Innern einer Kugel zu finden auf der ein äusseres Potential $v(\theta)$ angelegt wird, dass nur vom Winkel θ abhängt. Es empfiehlt sich in diesem Fall, die Lösung f direkt als eine Funktion der Kugelkoordinaten anzusetzen, und entsprechend den Laplace Operator in Kugelkoordinaten zu schreiben. Dieser nimmt die Form

$$\Delta f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r f + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0. \tag{4.1.37}$$

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass wir es mit Problemen zu tun haben, in denen die Lösung aus Symmetriegründen nicht von ϕ abhängt, wodurch der letzte Term in der Gleichung wegfällt. Wir müssen dann noch Randwertprobleme der Form

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r f + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0, \tag{4.1.38}$$

für $r \in [0, 1)$, $\theta \in [0, \pi)$, und mit Randbedingungen

$$f(1, \theta) = v(\theta).$$

Wie im Fall der Wärmeleitungsgleichung machen wir einen Produktansatz:

$$f(r, \theta) = \frac{u(r)}{r} P(\theta).$$

(der Faktor $1/r$ vereinfacht den r -Teil der Gleichung, wie man sieht). Die Gleichung nimmt dann die Form an

$$P(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) + \frac{u(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (4.1.39)$$

Dies können wir umschreiben als

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) = u(r) r^{-2} \frac{1}{P(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \right). \quad (4.1.40)$$

Betrachten wir dies als eine Gleichung für $u(r)$, so muss natürlich eine Lösung gefunden werden, die nicht von θ abhängt. Dies ist aber nur der Fall, wenn

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \right) = \lambda P(\theta). \quad (4.1.41)$$

Wieder also haben wir eine Eigenwertgleichung zu lösen. Da P periodisch mit Periode π sein muss, schreibt man es gerne als Funktion von $x = \cos \theta$. In dieser Variablen nimmt die Gleichung die Form

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} = \lambda P(x),$$

wo $x \in [-1, 1]$. Nun gibt es im Hilbertraum $L^2([-1, 1], dx)$ eine durch Gram-Schmidt Orthogonalisierung erhaltene Basis von Polynomen

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell.$$

Völlig analog zum Beispiel der Hermite Polynome kann man zeigen, dass diese die Eigenwertgleichung (4.1.41) erfüllen, und zwar mit

$$\lambda = -\ell(\ell + 1), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

(Übung!) Damit wissen wir aber, dass wir alle Eigenwerte und Eigenfunktionen unseres Problems gefunden haben.

Damit können wir in unsere ursprüngliches Problem zurückkehren. Für gegebenes ℓ , ist die Gleichung für u

$$u''(r) = r^{-2}\ell(\ell+1)u(r).$$

Diese Gleichung hat offensichtlich die eine zwei-dimensionale Schar von Lösungen

$$u_\ell(r) = Ar^{\ell+1} + Br^{-\ell}.$$

Damit haben wir einen allgemeinen Lösungsansatz

$$f(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos\theta).$$

Je nachdem, ob eine Lösung innerhalb oder ausserhalb der Kugel gesucht wird, wird man entweder die negativen oder positiven Potenzen von r verwerfen. Für die Lösung unseres Problems bleibt also nur noch die Randbedingung

$$v(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos\theta).$$

Dies bestimmt die Koeffizienten vollständig, mit der expliziten Integraldarstellung

$$A_\ell = \frac{1}{N_\ell} \int_{-1}^1 P_\ell(x) v_0(\arccos x) dx N_\ell,$$

wobei N_ℓ die Normierungskonstante

$$N_\ell^2 = \int_{-1}^1 P_\ell^2(x) dx = \frac{2}{2\ell+1}.$$

4.2 Fouriertransformation

In diesem Kapitel betrachten wir eine wichtige Erweiterung des Konzepts der Fourierreihen auf den Fall, dass wir Funktionen über ganz \mathbb{R} betrachten. Dies ist z.B. dann relevant, wenn wir Gleichungen wie

$$-f''(x) = \lambda(x)$$

auf ganz \mathbb{R} betrachten. Dann werden nämlich nicht mehr bloß eine diskrete Menge von Werten von λ Lösungen liefern, sondern alle positiven λ sind gleichberechtigt, da für jedes $\lambda \geq 0$, $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ die Gleichung löst und keine Randbedingung einen Wert vor dem anderen auszeichnet.

4.2.1 Definition und Eigenschaften

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Wir definieren die *Fourier-Transformierte*,

$$\hat{f}(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx. \quad (4.2.1)$$

Der die natürliche Klasse von Funktionen, für die diese Definition sinnvoll ist, ist $L^1(\mathbb{R}, dx)$, d.h. die Menge der Funktionen für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \equiv \|f\|_1 < \infty. \quad (4.2.2)$$

Eine wichtige Eigenschaft der Fouriertransformation ist wie schon bei den Fourierreihen, dass Ableitungen im Fourierraum eine einfache Form annehmen. Wir benutzen die Abkürzung $f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x)$.

Lemma 4.18. *Sei f k -mal differenzierbar und seien für alle $0 \leq \ell \leq k$, $f^{(\ell)} \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. Dann gilt*

$$\widehat{f^{(k)}}(u) = (iu)^k \hat{f}(u). \quad (4.2.3)$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $k = 1$. Es ist ja mit partieller Integration

$$\widehat{f^{(1)}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f'(x) e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + iu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-iux} dx$$

Da wegen der Integrierbarkeit von $|f'(x)|$ notwendig der erste Term verschwindet, folgt das Resultat sofort. Den allgemeinen Fall erhalten wir durch wiederholte Anwendung desselben Arguments.

Eine weitere, hiemit verwandte Eigenschaft der Fouriertransformation ist, dass sie Faltungen in Produkte verwandelt.

Lemma 4.19. *Seien $f, g \in L^1(dx)$, und sei $f \star g$ definiert durch*

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy. \quad (4.2.4)$$

Dann gilt

$$\widehat{f \star g}(u) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(u) \hat{g}(u). \quad (4.2.5)$$

Beweis. Der Beweis ist elementar. Wir haben

$$\begin{aligned}
\widehat{f \star g}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iux} \int \int f(x-y)g(y)dydx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int e^{-iu(x-y)} e^{-iuy} f(x-y)g(y)dydx \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iuz} f(z)dz \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iuy} g(y)dy \\
&= \sqrt{2\pi} \hat{f}(u) \hat{g}(u).
\end{aligned}$$

4.2.2 Die Inversionsformel

Die wichtigste Frage ist natürlich ‘‘Wie kommen wir hier bloß wieder zurück?’’. D.h., gegeben eine Fouriertransformierte, $\hat{f}(u)$, können wir die ursprüngliche Funktion zurückgewinnen. Im vorigen Kapitel war das gerade die Fourierreihe. Wir wollen zeigen, dass hier etwas ähnliches gilt. Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

Theorem 4.20. Sei $f \in L^1(dx)$, und gilt $\hat{f} \in L^1(du)$, dann ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(t) e^{iux} \hat{f}(u) du, \quad (4.2.6)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$, und insbesondere für alle x bei denen f stetig ist.

Beweis. Wir benutzen zunächst das folgende Lemma.

Lemma 4.21. Sei

$$\phi_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.2.7)$$

Dann gilt

$$\widehat{\phi_{\sigma}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right) = \sigma^{-1} \phi_{\sigma^{-2}}(u) \quad (4.2.8)$$

Beweis. Man kann dieses Resultat auf verschiedene Weisen zeigen. Wir gehen wie folgt vor.

$$\widehat{\phi_{\sigma}}'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (-ix) e^{-iux} dx. \quad (4.2.9)$$

Nun ist

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (-ix) e^{iux} = i\sigma^2 \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) e^{iux}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}'_{\sigma}(u) &= \frac{1}{2\pi\sigma} \int i\sigma^2 \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) e^{-iux} dx \\
&= -i\sigma^2 \frac{1}{2\pi\sigma} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{d}{dx} e^{-iux} dx \\
&= -u\sigma^2 \frac{1}{2\pi\sigma} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-iux} dx
\end{aligned}$$

und daher erhalten wir durch partielle Integration in (4.2.9),

$$\widehat{\phi}'_{\sigma}(u) = -u\sigma^2 \widehat{\phi}_{\sigma}(u). \quad (4.2.10)$$

Da $\widehat{\phi}_{\sigma}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ gilt, ist die rechte Seite von (4.2.8) die einzige Lösung dieser Differentialgleichung. \square

Nun betrachten wir $f_{\sigma} \equiv f \star \phi_{\sigma}$. Es gilt, da

$$\begin{aligned}
f_{\sigma}(x) &= \int f(x-y)\phi_{\sigma}(y)dy = \int f(x-y)\phi_{\sigma}(-y)dy = \int f(x-y)\sigma^{-1}\widehat{\phi}_{\sigma^{-1}}(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \int f(x-y)e^{iyz}\phi_{\sigma^{-1}}(z)dydz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \int f(x-y)e^{-i(x-y)z}e^{izx}\phi_{\sigma^{-1}}(z)dydz \\
&= \int \widehat{f}(z)e^{izx}\sigma^{-1}\phi_{\sigma^{-1}}(z)dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(z)e^{izx}e^{-\frac{z^2\sigma^2}{2}} dz.
\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass $\phi_{\sigma} \rightarrow \delta_0$ konvergiert, wenn $\sigma \downarrow 0$. Daher konvergiert $f_{\sigma}(x) \rightarrow f(x)$, wenn $\sigma \downarrow 0$. Andererseits strebt $e^{-\frac{z^2\sigma^2}{2}} \rightarrow 1$, für jedes x . Daraus, und dem Satz von der dominierten Konvergenz, folgt, dass die letzte Zeile nach

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(z)e^{izx} dz$$

strebt. Damit ist unser Satz bewiesen. \square

Anmerkung 4.22. Die Voraussetzungen des Satzes sind wichtig. Es ist weder der Fall, dass jede Fouriertransformierte einer L^1 -Funktion wieder in L^1 ist, noch ist das Gegenteil der Fall. Man muss also bei der Anwendung der Umkehrformel immer nachprüfen, ob die Voraussetzungen erfüllt sind.

Anmerkung 4.23. Die Berechnung und die Umkehrung von Fouriertransformationen ist nicht immer einfach. Wir werden in der Vorlesung *Mathematik für Physiker III* Techniken kennenlernen, die oft sehr hilfreich sind. Diese benützen tiefe Resultate aus der Theorie der komplexen Funktionen.

4.2.3 Anwendung auf Differentialgleichungen

Eine wichtige Anwendung der Fouriertransformation ist wieder die Lösung linearer Differentialgleichungen. Wir betrachten ein Beispiel. Es sei g eine Funktion auf \mathbb{R} so dass sowohl g als auch \hat{g} in L^1 sind. Wir wollen die Differentialgleichung

$$-f''(x) + f(x) = g(x) \quad (4.2.11)$$

lösen. Indem wir zu den Fouriertransformierten übergehen, erhalten wir die Gleichung

$$(u^2 + 1)\hat{f}(u) = \hat{g}(u),$$

die wir natürlich sofort lösen können:

$$\hat{f}(u) = \frac{\hat{g}(u)}{u^2 + 1}.$$

Wir stellen auch sofort fest, dass die rechte Seite der Gleichung in L^1 ist. Mit unserer Umkehrformel erhalten wir dann eine Lösung der Differentialgleichung als

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\hat{g}(u)}{u^2 + 1} e^{ixu} du.$$

Dies können wir sogar noch vereinfachen: Man kann leicht nachprüfen, dass die Funktion $1/(u^2 + 1)$ die Fouriertransformierte der Funktion $\phi(x) = \sqrt{\pi/2}e^{-|x|}$ ist. Daher ist $\frac{\hat{g}(u)}{u^2 + 1}$ die Fouriertransformierte der Faltung $g \star \phi$. Somit haben wir dass

$$f(x) = (g \star \phi)(x) = \sqrt{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} g(y) dy.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann die Summe dieser Lösung und einer Lösung der homogenen Gleichung $f'' = f$, also $f = ae^x + be^{-x}$.

Literaturverzeichnis

1. V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1989. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.
2. Wendell Fleming. *Functions of several variables*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1977. Undergraduate Texts in Mathematics.
3. Andreas Knauf. *Mathematik für Physiker II*. 2008. Vorlesungsskript Uni Erlangen, online abrufbar.
4. Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.

Sachverzeichnis

- $C^{(1)}$, 27, 30
- $L^2(\mu)$, 13
- σ -Algebra, 4
- k -Formen, 46
- äusseres Ableitung, 37
- äusseres Produkt, 35, 46

- Abbildung
 - bilineare, 34
 - lineare, 29
 - reguläre, 34
- Ableitung
 - äußere, 37
- alternierend, 35

- Basis, 55
- bilineare Abbildung, 34
- Bilinearform
 - alternierende, 35
- Bogenlänge, 29
- Borel- σ -Algebra, 4
- Borel-Menge, 4

- Cantormenge, 5
- Cauchy-Schwartz Ungleichung, 14
- Cauchyfolge, 54

- Dichte, 12
- Differential, 30
- Differential-2-Form, 34, 37
- Differential- k -Formen, 47
- Differentialform, 29
 - exakte, 30
 - geschlossene, 30, 37
- Differentialgleichung, 60
 - partielle, 64
- differenzierbar, 27

- Dirac-Funktion, 12
- Dirac-Maß, 12
- Dirichletproblem, 62
- Dualraum, 34

- Eigenwert, 61
- einfache Funktion, 6

- fast überall, 9
- Fatou's Lemma, 8
- Fläche, 38
- Fourierreihe, 56
- Fraktale, 5
- Fubini
 - Satz von, 19
- Funktion
 - einfache, 6
 - messbare, 4

- Gram-Schmidt Verfahren, 14
- Green'sche Funktion, 62
- Green'sche Identitäten, 51

- Hamilton'sche Gleichungen, 32
- Hamiltonfunktion, 32
- Hamiltonoperator, 67
- harmonischer Oszillator, 67
- Hauptsatz der Analysis, 2
- Hermite Polynome, 15, 65
- Hilbertraum, 13, 53, 54

- Indikatorfunktion, 6
- inneres Produkt, 14, 46
- Integral
 - Lebesgue, 3
 - Riemann, 1

- Kreuzprodukt, 36

- Kurven, 27
- Kurvenintegral, 30
- Länge
 - einer Kurve, 28
- Laplace Gleichung, 68
- Lebesgue
 - dominierter Konvergenzsatz, 9
- Lebesgue Integral, 3
- Lebesgue Maß, 5
- Legendre Polynome, 68
- Lemma
 - Fatou's, 8
- lineare Abbildung, 29
- Maß, 11
- Mannigfaltigkeit, 34
- messbar, 4
- Metrik, 53
- metrischer Raum, 53
- monotone Konvergenz, 7
- Norm, 14
- Nullmengen, 5
- Orientierung, 40, 47
- orthogonal, 14
- Orthogonalisierung, 14
- orthonormal, 14
- Parametrisierung, 34
 - Kurven, 28
- partielle Integration, 2
- Produkt
 - äußeres, 35
- quadratintegrierbar, 13
- Randwertproblem, 61
- Raum
 - metrischer, 54
 - separabler, 54
 - vollständiger, 54
- regulär, 34
- Riemann Integral, 1
- rotation, 37
- Satz
 - von Fubini-Lebesgue, 19
 - von Fubini-Tonnelli, 18
 - von Gauss, 50
 - von Lebesgue, 9
 - von Stokes, 44, 48
- Schrödingergleichung, 67
- Skalarprodukt, 14, 54
- sphärische Koordinaten, 68
- Stokes
 - Satz von, 44
- Substitutionsregel, 2
- Tangente, 27
- Vektorfeld, 29
- verallgemeinerte Funktionen, 12
- Vollständigkeit, 54
- Wärmeleitungsgleichung, 64