Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Robert Philipowski, Eva Kopfer, Angelo Profeta

"Einführung in die Statistik"

Übungszettel Nr. 6

Abgabe am 01.06.16

Aufgabe 1 (Normalapproximation der Chiquadrat-Quantile) [*5 Punkte*]

Für $0 < \alpha < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\chi^2_{n;\alpha}$ das α-Quantil der χ^2_n-Verteilung und $\Phi^{-1}(\alpha)$ das α-Quantil der Standardnormalverteilung. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\chi^2_{n;\alpha} - n}{\sqrt{2n}} \to \Phi^{-1}(\alpha) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 2 (Approximatives Konfidenzintervall) [*5 Punkte*]

Es seien $X_1, \ldots, X_N$ unabhängige auf $[0, \vartheta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Parameter $\vartheta > 0$.

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $X_{(N)} = \max_{1 \le i \le N} X_i$ der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist. Zeigen Sie, dass für alle ϑ

$$\frac{N(\vartheta - X_{(N)})}{\vartheta} \xrightarrow{d} V, \quad \text{für } N \to \infty,$$

wobei V eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 ist.

b) Benutzen Sie a) um ein approximatives Konfidenzintervall für ϑ zum Niveau $1 - \alpha$ zu konstruieren.

Aufgabe 3 (Rund um die Normalverteilung) [*4 Punkte*]

Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y := e^X$ im Falle, dass

a) $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$,

b) $X \sim \mathrm{Exp}_\lambda$.

Aufgabe 4 (Maximale Entropie) [*6 Punkte*]

Sei C eine positiv-definite, symmetrische $n \times n$-Matrix und $\mathscr{P}_C$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ mit den Eigenschaften

(i) μ ist zentriert und hat Kovarianzmatrix C, d. h. $\int_{\mathbb{R}^n} x_i \mathrm{d}\mu(x) = 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \mathrm{d}\mu(x) = C_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

(ii) μ hat eine Dichte ρ bzgl. Lebesgue und die Entropie

$$H(\mu) := -\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \log \rho(x) \mathrm{d}x$$

existiert.

Zeigen Sie

$$H(\mathcal{N}_n(0, C)) = \frac{n}{2} \log \left(2\pi e (\det C)^{1/n}\right) = \max_{\mu \in \mathscr{P}_C} H(\mu),$$

wobei $\mathcal{N}_n(0, C)$ das n-dimensionale Gauß-Maß mit Erwartungswertvektor 0 und Kovarianzmatrix C bezeichnet.

Hinweis: Betrachten Sie die relative Entropie $H(\mu | \mathcal{N}_n(0, C))$ und denken Sie an eine Aussage aus der Vorlesung diesbezüglich.