Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Robert Philipowski, Eva Kopfer, Angelo Profeta

"Einführung in die Statistik"

Übungszettel Nr. 3

Abgabe am 04.05.16

Aufgabe 1 (Lohnverteilung) [*4 Punkte*]

Ein übliches Modell für den Lohn X eines zufällig ausgewählten Arbeiters einer Branche ist, dass X Pareto-(k, a)-verteilt ist, wobei k der Mindestlohn und $a > 0$ ist. Die Dichtefunktion von X ist dann durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{ak^a}{x^{a+1}} & \text{für} \quad x \geq k \\ 0 & \text{für} \quad x < k \end{cases}$$

gegeben.
Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für a, wenn k bekannt ist und wir N unabhängige Werte für den Arbeitslohn beobachten. Ist dies für alle Werte von a möglich?

Aufgabe 2 (Log-Normalverteilung) [*6 Punkte*]

Es seien $X_1, \ldots, X_N$ i.i.d. Zufallsvariablen, log-normalverteilt, d.h. $\log X_i$ ist $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$-verteilt, wobei σ^2 bekannt ist, und X_i hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\log x - \theta)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

(Diese Verteilung wird beispielsweise oft für Aktienkurse als Annahme zugrunde gelegt.)
Bestimmen Sie einen gleichmäßig varianzminimierenden Schätzer T für θ, sowie die Cramér-Rao Schranke für die Varianz von T. Wird diese erreicht?

Aufgabe 3 (Hardy-Weinberg Gleichgewicht) [*10 Punkte*]

In einer (hypothetisch unendlich großen) Population gebe es die drei genetischen Typen aa, aA und AA mit Häufigkeiten $p_{aa} = \theta^2$, $p_{aA} = 2\theta(1-\theta)$, $p_{AA} = (1-\theta)^2$. Dabei ist $\theta \in (0, 1)$. In einer Stichprobe der Größe N aus der Population beobachten wir n_t Individuen von Typ t, wobei $t \in \{aa, aA, AA\}$ und $N_{aa} + N_{aA} + N_{AA} = N$.

a) Formulieren Sie ein Modell und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

b) Ist der Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu?

c) Berechnen Sie die Fisher-Information.

d) Überprüfen Sie, ob der Maximum-Likelihood-Schätzer ein Cramér-Rao Schätzer ist.