Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Robert Philipowski, Eva Kopfer, Angelo Profeta

"Einführung in die Statistik"

Übungszettel Nr. 2

Abgabe am 27.04.16

Aufgabe 1 (Maximum-Likelihood) [*5 Punkte*]

In einer Lostrommel befinden sich n Lose mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$. Dabei ist n unbekannt. Der kleine Fritz will wissen, wie viele Lose sich in der Trommel befinden und entnimmt in einem unbeobachteten Augenblick ein Los, merkt sich die aufgedruckte Nummer und legt es wieder in die Trommel zurück. Das macht er N-mal.

a) Berechnen Sie aus den gemerkten Nummern $X_1, \ldots, X_N$ einen Maximum-Likelihood-Schätzer T für n.

b) Berechnen Sie approximativ für großes n den relativen Erwartungswert $\mathbb{E}_n[T]/n$.

c) Diesmal zieht der kleine Fritz die N Lose *ohne* Zurücklegen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T für n und berechnen Sie $\mathbb{E}_n[T]$.

Aufgabe 2 (Maximum-Likelihood) [*5 Punkte*]

Bestimmen Sie für $n \geq 1$ einen Maximum-Likelihood-Schätzer

a) im Poisson-Produktmodell $(\mathbb{Z}_+^n, \mathscr{P}(\mathbb{Z}_+^n), \mathcal{P}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta > 0)$,

b) im Beta-Produktmodell $((0,1)^n, \mathscr{B}_{(0,1)}^{\otimes n}, Q_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta > 0)$, wobei $Q_\vartheta = \beta_{\vartheta,1}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(0,1)$ mit Dichte $\rho_\vartheta(x) = \vartheta x^{\vartheta-1}$ ist,

c) im geometrischen Produktmodell $(\mathbb{Z}_+^n, \mathscr{P}(\mathbb{Z}_+^n), \mathcal{G}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in (0,1])$.

Überprüfen Sie, ob diese eindeutig bestimmt und erwartungstreu sind.

Aufgabe 3 (Nine million bycicles in Beijing) [*5 Punkte*]

In Peking gibt es eine unbekannte Anzahl ϑ an Fahrrädern. Zur Schätzung von ϑ werden zunächst w Fahrräder ausgewählt und in der selben Farbe angemalt (eine Farbe, die sonst kein anderes Fahrrad in Peking hat). Dann werden sie wieder auf die Straße gelassen und man lässt ein bisschen Zeit vergehen, bis sie sich wieder gut verteilt haben. Danach wählt man zufällig n Fahrräder aus. Davon sind x in der besagten Farbe markiert.

a) Stellen Sie ein statistisches Modell auf.

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer.

c) Was passiert im Fall $x = 0$?

Aufgabe 4 (Erwartungstreue ist nicht immer wünschenswert) [*5 Punkte*]

Wir betrachten das Binomialmodell $\mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}$, $\Theta = [0, 1], \mathbb{P}_\vartheta = B_{\vartheta,n}$. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist $T(x) = x/n$.

a) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler $MSE_\vartheta(T)$ von T.

b) Sei $S(x) := \frac{x+1}{n+2}$ ein weiterer Schätzer. Berechnen Sie den systematischen Fehler und den mittleren quadratischen Fehler $MSE_\vartheta(S)$.

c) Zeigen Sie, dass für ϑ nahe bei $1/2$ der mittlere quadratische Fehler von S kleiner ist als der von T in dem Sinne, dass $MSE_\vartheta(S) \leq MSE_\vartheta(T)$ genau dann wenn

$$\frac{|\vartheta - 1/2|^2}{\vartheta(1-\vartheta)} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$