Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

universitätbonn

9. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag 13 Uhr in den Postfächern gegenüber der Bibliothek

---

1. (Konvergenz des Newton-Verfahrens)

a) Diskutieren Sie die Konvergenz des Newton-Verfahrens für die Funktion

$$f(x) \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x}$$

für alle (zulässigen) positiven Startwerte x_0.

b) Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige dreimal stetig differenzierbare Funktion mit einfacher Nullstelle x^*. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte aus einer Umgebung von x^* quadratisch gegen x^* konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass das Iterationsverfahren

$$y_n \;=\; x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} \;=\; y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

lokal gegen x^* konvergiert, und mindestens die Konvergenzordnung 3 besitzt.

2. (Diskretisierung eines Randwertproblems)

Seien p und u hinreichend glatte Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Präzisieren Sie die Aussage

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right) \;\approx\; \frac{p(x-\frac{h}{2})u(x-h) - \left[p(x-\frac{h}{2}) + p(x+\frac{h}{2})\right]u(x) + p(x+\frac{h}{2})u(x+h)}{h^2},$$

und geben Sie eine Diskretisierung des linearen Randwertproblems

$$-(pu')' + qu = f \;\text{ auf (a,b)}, \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

an.

3. (Numerische Quadratur)
Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$I[f] \;=\; \int_a^b f(x)\,dx$$

einer Funktion f auf einem "kleinen" Intervall $[a,b]$ kann man u.a. die *Trapezregel*

$$T_{[a,b]}[f] \;=\; \frac{b-a}{2}\cdot\big(f(a)+f(b)\big)$$

oder die *Simpsonregel*

$$S_{[a,b]}[f] \;=\; \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4\,f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\right)$$

verwenden. Integrale über größere Intervalle berechnet man dann näherungsweise, indem man das Intervall zunächst in n Teilintervalle zerlegt und auf jedem der Teilintervalle die Trapez- bzw. Simpsonregel anwendet. Dies führt zur Approximation von $I[f]$ durch die *Trapezsumme*

$$T_n[f] \;=\; \frac{h}{2}\Big(f(a)+2\,f(x_1)+\ldots+2\,f(x_{n-1})+f(b)\Big)$$

mit $x_i = a + i\,h$ für $i = 0,\ldots,n$ und $h = \frac{b-a}{n}$ bzw. die *Simpsonsumme*

$$S_n[f] \;=\; \frac{h}{3}\Big(f(a)+4\,f(x_1)+2\,f(x_2)+4\,f(x_3)+\ldots+2\,f(x_{2\,n-2})+4\,f(x_{2\,n-1})+f(b)\Big)$$

mit $x_i = a + i\,h$ für $i = 0,\ldots,2\,n$ und $h = \frac{b-a}{2\,n}$. Zeigen Sie:

a) Die Trapezregel liefert für jedes Polynom 1. Grades den korrekten Wert des Integrals, die Simpsonregel sogar für jedes Polynom vom Grad ≤ 3.

b) Für die Trapez- bzw. Simpsonsumme gilt $T_n[f] \;=\; I[f]$ für jede Funktion f, die auf jedem der n Teilintervalle $[a+i/n, a+(i+1)/n]$ linear ist, und $S_n[f] \;=\; I[f]$ für jede Funktion f, die auf jedem der n Teilintervalle ein Polynom vom Grad ≤ 3 ist.

c) Sei f zweimal stetig differenzierbar und $C \in (0,\infty)$ mit $|f''(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$. Leiten Sie eine Abschätzung für den Approximationsfehler $\big|T_n[f] - I[f]\big|$ her.

Literatur zur Numerik:

- W. Dahmen, A. Reusken: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Springer.
- P. Deuflhard, A. Hohmann: *Numerische Mathematik*, de Gruyter.
- J. Werner: *Numerische Mathematik 1*, Vieweg.
- G. Hämmerlin, K.-H. Hoffmann: *Numerische Mathematik*, Springer.
- M. Hanke-Burgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner.
- A. Quarteroni, R Sacco, F. Saleri: *Numerical Mathematics*, Springer.