Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

8. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag 13 Uhr in den Postfächern gegenüber der Bibliothek

---

1. (Heron–Verfahren)

Zur Berechnung der Quadratwurzel von positiven Zahlen benutzten wohl schon die Babylonier, spätestens aber der Alexandriner *Heron* (etwa 1. Jh. n. Chr.), das folgende Verfahren: Für beliebige reelle Startwerte $x^{(0)} > 0$ und reelles $a > 0$ setze

$$x^{(n+1)} \;=\; \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{a}{x^{(n)}}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $x^{(n)}$ für $x^{(0)} > \sqrt{a}$ monoton fallend und durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt ist. Folgern Sie, daß die Folge in diesem Fall gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Was passiert für Startwerte $x^{(0)} \in (0, \sqrt{a})$?

b) Zeigen Sie weiter, dass das *Heron Verfahren* sogar quadratisch konvergiert, d.h. es existiert eine Konstante $C \in (0, \infty)$ mit

$$\left|x^{(n+1)} - \sqrt{a}\right| \;\leq\; C \cdot \left|x^{(n)} - \sqrt{a}\right|^2 .$$

c) Führen Sie vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{2}$ aus. Wählen Sie dazu $x^{(0)} = 2$, und stellen Sie erst $x^{(4)}$ als Dezimalzahl dar. Schätzen Sie den Fehler ab.

2. (Fixpunktiteration mit Rundungsfehlern)

Sei $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, welche die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit einer Kontraktionskonstanten $L < 1$ erfülle. Bei der numerischen Implementation führen in der Regel Rundungsfehler dazu, dass die Fixpunktiteration $x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)})$ nicht exakt ausgewertet werden kann. Statt $\phi(x)$ betrachten wir daher den gestörten Funktionswert $\phi(x) + r(x)$, wobei eine positive Konstante δ existiere mit $|r(x)| \leq \delta \;\forall\, x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass für die durch

$$\tilde{x}^{(0)} \;=\; x^{(0)}, \qquad \tilde{x}^{(k)} \;=\; \phi(\tilde{x}^{(k-1)}) + r(\tilde{x}^{(k-1)})$$

definierte gestörte Folge gilt:

$$|\tilde{x}^{(k)} - x^*| \;\leq\; \frac{\delta}{1-L} + L^k \left(|x^{(0)} - x^*| - \frac{\delta}{1-L}\right) \qquad \text{für alle } k \geq 0,$$

wobei x^* der eindeutige Fixpunkt von ϕ ist.

3. (Matrixnormen)

Die (ℓ_p, ℓ_p)-Matrixnorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist für $p \in [1, \infty]$ gegeben durch

$$\|A\|_p \;=\; \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|_p}{\|v\|_p}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen :

a) $\|A\|_1 \;=\; \max_{j=1,\dots,d} \sum_{i=1}^d |a_{ij}|$,

b) $\|A\|_\infty \;=\; \max_{i=1,\dots,d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|$,

c) $\|A\|_2 \;\leq\; \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$,

d) $\|A\|_2 \;\leq\; \|A\|_F \;\leq\; \sqrt{d}\|A\|_2$.

4. (Monte Carlo Schätzer)

Ein System besteht aus 20 unabhängigen Komponenten. Die i-te Komponente funktioniert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} + \frac{i}{50}$. Sei X die Anzahl der funktionsfähigen Komponenten.

a) Entwickeln Sie ein Monte-Carlo Verfahren, um die Wahrscheinlichkeit

$$p := P[X \leq 5]$$

effektiv abzuschätzen.

b) Leiten Sie eine obere Schranke für die Varianz des von Ihnen verwendeten Monte-Carlo-Schätzers her. Wieviele Stichproben benötigen Sie, um mit 95 % Wahrscheinlichkeit einen relativen Fehler $\leq 10\%$ garantieren zu können?