Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

6. Übungsblatt „AlMa 2" und „Stochastik (Lehramt)"

Abgabe von Aufgabe 1-3 bis Dienstag den 28.5., 13 Uhr, die Aufgaben 4-6 können noch bis 4.6. abgegeben werden.

---

1. (Binomialmodell für Aktienkurse)

In einem einfachen Finanzmarktmodell wird angenommen, dass der Kurs S_n einer Aktie an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ auf den Wert $u \cdot S_n$ steigt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor $d < 1$ auf den Wert $d \cdot S_n$ fällt.

Präzisieren Sie die Modellannahmen, und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Kurses S_n nach n Tagen, wenn der Kurs bei $S_0 = 1$ startet.

2. (Korrelationskoeffizient)

a) Zeigen Sie, dass für die Korrelation zweier diskreter Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}^2$ mit $\mathrm{Var}[X] \neq 0$ und $\mathrm{Var}[Y] \neq 0$ gilt:

$$|\rho[X, Y]| \leq 1 \tag{1}$$

b) Geben Sie Beipiele von Zufallsvariablen X, Y mit Werten in $\{0, 1\}$, deren Korrelationskoeffizient in folgenden Bereichen liegt: (i) $\rho[X, Y] = 1$, (ii) $\rho[X, Y] \in (0, 1)$, (iii) $\rho[X, Y] = 0$, (iv) $\rho[X, Y] \in (-1, 0)$, (v) $\rho[X, Y] = -1$.

c) Wann gilt Gleichheit in (1) ?

3. (Gesetz der großen Zahlen)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E[X_i] = m$ und $\mathrm{Var}[X_i] = v$. Es gelte

$$|\mathrm{Cov}[X_i, X_j]| \leq r(|i - j|)$$

für eine Funktion $r : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty)$. Finden Sie Bedingungen für r, also Bedingungen für das Abklingen der Korrelationen, unter denen immer noch die Aussage des schwachen Gesetzes der großen Zahlen gilt.

4. (Endliche Markovketten)
Wir betrachten zeithomogene Markovketten (X_n) und (Y_n) auf $\{1,2,3\}$ mit Übergangsmatrizen

$$p := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad q := \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

und Startwert $x_0 \in \{1,2,3\}$. Untersuchen Sie die Asymptotik der Verteilungen der Markovketten für $n \to \infty$.

5. (Exponentielle Abschätzungen)

a) Sei X eine diskrete reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für alle $c, t \geq 0$ gilt:

$$P[X \geq c] \;\leq\; e^{-ct}\, E\left[e^{tX}\right].$$

b) Es seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$, $0 < p < 1$. Zeigen Sie, dass für $a, t \geq 0$ gilt:

$$P\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\Big] \;\leq\; \mathrm{e}^{-nat}\, E\big[\mathrm{e}^{tX_1}\big]^n.$$

Beweisen Sie mithilfe dieser Abschätzung die Bernstein-Ungleichung

$$P\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq p + \varepsilon\Big] \;\leq\; \mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2} \qquad \text{für alle } \varepsilon \geq 0.$$

6. (Zufällige Summen mit zufälliger Summandenzahl)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $N : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert m_1 und Varianz v_1. Zeigen Sie:

a) Für den Erwartungswert $E[Y]$ einer reellwertigen Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt

$$E[Y] \;=\; \sum_{P[N=k]\neq 0} E[Y|N=k] \cdot P[N=k]\,.$$

b) Sind $X_1, X_2, \ldots$ von N unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit festem Erwartungswert m_2 und Varianz v_2, dann hat die zufällige Summe

$$S_N(\omega) \;:=\; X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

den Erwartungswert $E[S_N] = m_1 m_2$ und die Varianz $\mathrm{Var}[S_N] = m_1 v_1 + m_2^2 v_1$.