Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

5. Übungsblatt „AlMa 2" und „Stochastik (Lehramt)"

Abgabe bis Dienstag 13 Uhr in den Postfächern gegenüber der Bibliothek

---

1. (Münzwürfe 1)

a) Zeigen Sie, dass die Varianz einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable X mit $E[|X|] < \infty$ durch

$$\mathrm{Var}[X] \;=\; E[X^2] - E[X]^2 \qquad\qquad \text{gegeben ist.}$$

b) Zehn Personen sitzen in einem Kreis, und jeder wirft eine faire Münze. Sei N die Anzahl der Personen, deren Münze die gleiche Seite wie die Münzen beider Nachbarn zeigt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[N = 9]$ und $P[N = 10]$, sowie den Erwartungswert $E[N]$.

c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}[N]$.

2. (Münzwürfe 2)
Eine Münze zeigt „Kopf" mit Wahrscheinlichkeit p. Sei π_n die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl von „Kopf" nach n Würfen gerade ist. Zeigen Sie, dass

$$\pi_{n+1} \;=\; (1-p)\pi_n \,+\, p(1-\pi_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, und berechnen Sie π_n.

3. (Geburtenverteilung)
Angenommen, die Gesamtzahl G der Geburten pro Woche in einem Krankenhaus ist Poissonverteilt mit Parameter λ. Weiterhin sei jede Geburt, unabhängig von anderen Geburten und von der Gesamtzahl der Geburten, mit Wahrscheinlichkeit p ein Junge, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ein Mädchen. Wir beschreiben die Anzahl der pro Woche geborenen Jungen bzw. Mädchen durch Zufallsvariablen J und M.

a) Zeigen Sie

$$P[J = j, M = m] \;=\; \frac{(\lambda p)^j \mathrm{e}^{-\lambda p}}{j!} \cdot \frac{(\lambda q)^m \mathrm{e}^{-\lambda q}}{m!}.$$

b) Folgern Sie, dass J und M unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λp bzw. λq sind.

4. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie)
Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) \; := \; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Sei X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$P[X = n] \; = \; \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

Sei E_m das Ereignis „X ist teilbar durch m". Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $P[E_m] = m^{-s}$.

b) Die Ereignisse E_p, wobei p eine Primzahl ist, sind unabhängig.

c) Berechnen Sie $P\big[\bigcap_{p \text{ Primzahl}} E_p^c\big]$, und folgern Sie die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} \; = \; \prod_{p \text{ Primzahl}} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$

d) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass X durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist, gleich $1/\zeta(2s)$ ist.

*) Sei Y unabhängig von X mit derselben Verteilung, und sei H der größte gemeinsame Teiler von X und Y. Sei B_p das Ereignis, dass X und Y beide durch p teilbar sind. Was hat das Ereignis $\bigcap B_p^c$ mit H zu tun? Zeigen Sie:

$$P[H = n] \; = \; \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

5. (Zufällige Polynome)
Seien U, V Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$, deren gemeinsame Verteilung bestimmt ist durch

$$P[U = 1] \; = \; P[U = -1] \; = \; \frac{1}{2}\,, \qquad \text{und}$$
$$P[V = 1 | U = 1] \; = \; P[V = -1 | U = -1] \; = \; \frac{1}{3}\,.$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + Ux + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?

b) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert der größeren Nullstelle von $x^2 + Ux + V$ gegeben es gibt mindestens eine reelle Nullstelle.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Polynom $x^2 + (U + V)x + U + V$ mindestens eine reelle Nullstelle?