Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

4. Übungsblatt „AlMa 2” und „Stochastik (Lehramt)”

Abgabe bis Dienstag 13 Uhr in den Postfächern gegenüber der Bibliothek

---

1. (Pflanzenzucht)

Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung von Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung. Begründe, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,y) \;:=\; P\big[\,\text{Genotyp } y \text{ in Generation } n+1 \,|\, \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n\,\big]$$

durch $p(Aa,AA) = p(Aa,aa) = 1/4$, $p(Aa,Aa) = 1/2$ und $p(aa,aa) = p(AA,AA) = 1$ gegeben sind. Berechne für beliebiges n die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit

$$p^n(Aa,Aa) \;=\; P\big[\,Aa \text{ in Generation } n \,|\, Aa \text{ am Anfang}\,\big].$$

2. (Polyas Urnenmodell)

Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei $R_n(\omega)$ die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{n,r} \;:=\; P[R_n = r], \qquad 1 \le r \le n+1,$$

a) für die Fälle $n = 1, 2$ und 3,

b) für den allgemeinen Fall.

3. (Tom Bayes in Bandrika)

Tom Bayes befindet sich auf seiner Bandrika-Reise genau in der Situation, wie Sie in *Aufgabe 4 vom 3. Übungsblatt*. Im Gegensatz zu Ihnen geht er jedoch davon aus, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε korrekt ist. Zeigen Sie:

a) Egal welche Antwort Tom auf seine erste Frage bekommt, glaubt er weiterhin, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

b) Sind die ersten beiden Antworten identisch (OO oder WW), so glaubt Tom immer noch, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

c) Nach drei gleichen Antworten beurteilt Tom die Situation folgendermaßen:

$$P\big[\,\text{Osten ist korrekt}\,|\,\text{OOO}\,\big] \;=\; \frac{9\varepsilon}{11-2\varepsilon}, \quad P\big[\,\text{Osten ist korrekt}\,|\,\text{WWW}\,\big] \;=\; \frac{11\varepsilon}{9+2\varepsilon}$$

4. (Ballot Theorem)

a) Betrachte einen Random Walk auf $\mathbb{Z}$, der in $a = 0$ startet. Für $\lambda \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_\lambda(\omega) \;=\; \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n(\omega) = \lambda\}.$$

Insbesondere ist T_0 die *erste Rückkehrzeit zum Startpunkt*. Zeigen Sie für $\lambda > 0$:

$$P[T_0 > n \text{ und } S_n = \lambda] \;=\; P[T_\lambda = n] \;=\; \frac{\lambda}{n}\, P[S_n = \lambda].$$

(Die Aussagen von Aufgabe 3 vom 3. Übungsblatt dürfen vorausgesetzt werden.)

b) Bei einer Wahl erhält Kandidat A α Stimmen und Kandidat B β Stimmen, $\beta < \alpha$. Angenommen, die Stimmen werden in „völlig zufälliger" Reihenfolge ausgezählt. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass A während der Stimmenauszählung stets in Führung liegt, beträgt $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

5. (Zufallspermutationen)

a) Eine aufsteigende Teilfolge einer Permutation $\omega \in S_n$ ist durch eine Sequenz

$$\omega(i_1) < \omega(i_2) < \ldots < \omega(i_k)$$

mit $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ gegeben. Sei $N(\omega)$ die Anzahl der aufsteigenden Teilfolgen der Permutation ω. Zeigen Sie, dass für eine (gleichverteilte) Zufallspermutation aus S_n gilt:

$$E[N] \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \binom{n}{k}.$$

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Zufallspermutation aus S_n erzeugt.