Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

2. Übungsblatt „AlMa 2" und „Stochastik (Lehramt)"

Abgabe bis Dienstag 13 Uhr in den Postfächern gegenüber der Bibliothek

---

1. (Warm-up)
Eine faire Münze wird n mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlickeit, dass beim n-ten Wurf

i) Kopf zum ersten mal eintritt,

ii) die Anzahl von Kopf und Zahl gleich ist,

iii) genau zweimal Kopf eingetreten ist,

iv) mindestens zweimal Kopf eingetreten ist.

2. (Geburten)
Im 18. Jahrhundert wurden in London in 82 aufeinander folgenden Jahren mehr Jungen als Mädchen geboren. Da Jungen und Mädchen mit ungefähr gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden, scheint das ein sehr unwahrscheinliches Ereignis zu sein, das der göttlichen Vorsehung zugeschrieben wurde. Ist das wirklich so?
Nehmen wir an, dass jede Geburt unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.485$ ein Mädchen ergibt (und vernachlässigen wir die Möglichkeit von Zwillingen usw.).

a) Zeigen Sie: die Wahrscheinlichkeit, dass in $2n$ Geburten mehr Mädchen als Jungen geboren werden ist nicht größer als

$$\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \frac{1-p}{1-2p} \, .$$

b) Nehmen wir an, dass in 82 aufeinander folgenden Jahren jedes Jahr 20.000 Kinder geboren werden. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren werden ist mindestens 0.99.

Hinweis: Sie können die Stirlingsche Formel benutzen:

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n} \leq e^{1/(12n)} \, .$$

3. (Bonferroni's Ungleichung)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big] \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} P[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P[A_i \cap A_j].$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 2$ und $k = 3$.

b) In jeder Packung Corn Flakes befindet sich je eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielern, darunter auch 11 Bilder von Spielern aus der Nationalmannschaft. Wer nun die Bilder aller 11 Nationalspieler gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Weltmeisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred Feuerstein $3n$ Packungen.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55 \cdot (1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

4. (Wartezeiten und Runs)

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Wartezeit T auf die erste 6 bei wiederholtem Würfeln mit einem fairen Würfel.

b) In manchen Anwendungen möchte man testen, ob eine Bitfolge

$$\omega \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$$

,,rein zufällig" zustande kam oder nicht. Eine Kenngröße, mit der man quantifizieren kann, ob die Nullen und Einsen sehr gleichmäßig verteilt sind oder eher in wenigen Gruppen (runs) vorkommen, ist die Zahl

$$V(\omega) \;:=\; |\{i \in \{2, \ldots, n\} \;|\; x_i \neq x_{i-1}\}|.$$

Beispielsweise ist $V\big((1,1,1,1,0,0,0,0)\big) = 1$ und $V\big((1,0,1,0,1,0,1,0)\big) = 7$.
Sei P die Gleichverteilung auf $\{0,1\}^n$. Zeigen Sie, dass

$$P[V = k] \;=\; 2^{-(n-1)} \binom{n-1}{k}.$$

c) Bestimmen Sie $V(\omega)$ für die vier Folgen auf der Homepage der Vorlesung (`http://www.uni-bonn.de/~eberle/AlMa13/Zufallszahlen042013.html`) und für eine von Ihnen selbst erstellte ,,möglichst zufällige" Folge. Wie können Sie beurteilen, ob die Folgen hinsichtlich der Runs echten Zufallsfolgen ähnlich sind?

5. (Zerlegungssatz für Summen - optional)

Sei A eine abzählbare Menge, und seien $p(\omega) \geq 0$, $\omega \in A$, nicht-negative reelle Zahlen. Zeigen Sie, das für jede disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} p(\omega).$$

P. (Zufallsexperimente mit Mathematica: Würfeln II)

a) Erzeugen Sie eine Liste mit $n = 100$ Zufallszahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und bestimmen Sie, wie oft die Zahl 6 in der Liste vorkommt. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $Z(\omega)$, die dieses Zufallsexperiment modelliert?

b) Wie wiederholen das Experiment nun 1000 mal. Erstellen Sie ein Feld x mit $1000 \times n$ Zufallszahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und speichern Sie in der Liste z die beobachteten Häufigkeiten der Zahl 6 in jeder der 1000 Stichproben von jeweils n Zufallszahlen.

c) Die Liste z enthält nun 1000 (pseudozufällige) Realisierungen der Werte der Zufallsvariablen Z. Erstellen Sie ein Histogramm von z. Zeichnen Sie das Histogramm in ein Diagramm zusammen mit der Massenfunktion der Zufallsvariablen Z, und vergleichen Sie.

d) Erstellen Sie mithilfe von `Manipulate` ein entsprechendes Diagramm für die ersten k Werte der Liste z, wobei k zwischen 1 und 1000 variiert werden kann. Was beobachten Sie?

Sollte die Speicherkapizität und/oder Geschwindigkeit Ihres Rechners die 1000 fache Wiederholung nicht ermöglichen, dann ersetzen Sie 1000 durch einen entsprechend kleineren Wert.