Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

10. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II"

Abgabe bis Dienstag 13 Uhr in den Postfächern gegenüber der Bibliothek

---

1. (Konvergenzkriterien für das Jacobi-Verfahren)

Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $a_{ii} \neq 0 \;\forall\, 1 \leq i \leq d$ und $b \in \mathbb{R}$ konvergiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) Das starke Zeilensummenkriterium:

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d} |a_{kl}| \;<\; |a_{kk}|, \qquad \forall\, 1 \leq k \leq d.$$

b) Das starke Spaltensummenkriterium:

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{d} |a_{kl}| \;<\; |a_{ll}|, \qquad \forall\, 1 \leq l \leq d.$$

c) Das starke Quadratsummenkriterium:

$$\sum_{k=1}^{d} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d} \left|\frac{a_{kl}}{a_{kk}}\right|^2 \;<\; 1.$$

2. (Optimierung von Iterationsverfahren)

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

betrachten wir das folgende Iterationsverfahren: Für einen beliebigen Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$x^{(k+1)} \;=\; T(\theta)\, x^{(k)} + g(\theta),$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter und

$$T(\theta) \;=\; \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{pmatrix}, \qquad g(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösung von $A\,x = b$ ein Fixpunkt des Iterationsverfahrens ist.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte für θ, für die das obige Verfahren konvergiert.

c) Berechnen Sie den optimalen Wert für θ, d.h. den Wert des Parameters, für den die Konvergenzgeschwindigkeit maximal ist.

3. (Markovketten und Differenzengleichungen)
Ein *Birth-Death-Prozess* ist eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(i, i+1) = p_i, \quad p(i, i-1) = q_i, \quad p(i, j) = 0 \text{ für } |i - j| \neq 1.$$

Hierbei seien $p_i, q_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$, mit $p_i + q_i = 1$. Sei X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i ein Birth-Death-Prozess mit den gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten und Startwert $i \in \mathbb{Z}_+$, und sei $a \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Ruin- bzw. Aussterbewahrscheinlichkeiten

$$r_i \;=\; \mathbb{P}_i[(X_n) \text{ erreicht } 0 \text{ vor } a], \qquad 0 \leq i \leq a.$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass $(r_0, r_1, \ldots, r_a)$ das folgende lineare Gleichungssystem löst:

$$\begin{aligned} r_i &= p_i\, r_{i+1} + q_i\, r_{i-1} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, a-1, \\ r_0 &= 1, \qquad r_a = 0. \end{aligned}$$

b) Schreiben Sie das Gleichungssystem als Differenzengleichung, und geben Sie eine Rekursionsformel für die Differenzen $r_{i+1} - r_i$ an.

c) Leiten Sie eine explizite Formel für die Ruinwahrscheinlichkeiten r_i her. Was ergibt sich im räumlich homogenen Spezialfall $p_i = p$, $q_i = q$ für $p \neq q$ bzw. für $p = q$?

P. (Jacobi- und Gauss-Seidel Verfahren)
(Abgabe beim Übungsgruppentutor)
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}
10\,x_1 & - & x_2 & & & & & & & & & = 10 \\
-x_1 & + & 10\,x_2 & - & x_3 & & & & & & & = 10 \\
 & - & x_2 & + & 10\,x_3 & - & x_4 & & & & & = 0 \\
 & & & - & x_3 & + & 10\,x_4 & - & x_5 & & & = 10 \\
 & & & & & - & x_4 & + & 10\,x_5 & - & x_6 & = 0 \\
 & & & & & & & - & x_5 & + & 10\,x_6 & = 10
\end{array}$$

mithilfe des a) Jacobi Verfahrens und b) mittels des Gauss–Seidel Verfahrens.