Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

1. Übungsblatt „AlMa 2" und „Stochastik (Lehramt)"

Abgabe bis Dienstag 13 Uhr in den Postfächern gegenüber der Bibliothek

---

1. (Gleichverteilung)

a) Sei Ω eine endliche Menge. Definiere die Gleichverteilung P auf Ω und zeige durch Überprüfen der Axiome, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} .$$

2. (Kolmogorovsche Axiome)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Es gelte $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$. Zeige: $\frac{1}{12} \le P[A \cap B] \le \frac{1}{3}$ und demonstriere anhand von Beispielen, dass beide Extremfälle eintreten können.

b) Zeige, dass $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$ ist.

c) Ist $A \cup B = \Omega$, dann gilt $P[A \cap B] = P[A]\, P[B] - P[A^c]\, P[B^c]$.

3. (Geburtstagsparadox) In einer Klasse sind n Schüler.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben ? Berechne p_{22} und p_{23} explizit. Dabei sei vereinfachend angenommen, dass kein Schüler am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind.

b) Zeige unter Verwendung der Ungeichung $1 - x \le \exp(-x)$, dass

$$p_n \ge 1 - \exp\big(-n(n-1)/730\big).$$

Welche untere Schranke ergibt sich für p_{30}?

4. (Gerüchte)
In einer Stadt mit $n+1$ Einwohnern erzählt eine Person einer zweiten ein Gerücht, diese ihrerseits erzählt es erneut weiter, usw. Bei jedem Schritt wird der „Empfänger" zufällig unter den n möglichen Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt (- gelegentlich erzählt also auch jemand das Gerücht derselben Person, von der er es gehört hat). Das Gerücht wird auf diese Weise r mal weiter erzählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) es nicht zum Urheber zurückkommt,

b) es keiner Person zweimal erzählt wird.

c) Setze im Ergebnis von a) insbesondere $r = n+1$, und berechne den Limes für $n \to \infty$.

5. (Ereignisse als Mengen)
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Was bedeuten (mit Begründung) die folgenden Ereignisse anschaulich?

$$\text{a) } A \cap B \qquad \text{b) } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{c) } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Sei nun speziell $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \{-1, +1\}\}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$S_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \omega = (x_1, x_2, \ldots) \in \Omega.$$

Was bedeuten die den folgenden Mengen zugeordneten Ereignisse anschaulich?

$$\text{d) } S_n^{-1}([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]) \qquad \text{e) } \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} S_m^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

P6. (Zufallsexperimente mit Mathematica: Würfeln I) *(Hinweise siehe unten)*

a) Um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten, initialisieren Sie den Zufallszahlengenerator zunächst mit **SeedRandom**[**"Nachname"**], wobei Sie für *Nachname* Ihren eigenen Namen einsetzen.

Erzeugen Sie dann eine Liste mit 1000 Zufallszahlen aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, speichern Sie diese in der Variable x, und erstellen Sie mithilfe von **Histogram**[. . . , . . . , "Probability"] ein Histogramm der *relativen* Häufigkeiten der Werte 1 bis 6.

Erzeugen Sie mithilfe von **Manipulate** ein Histogramm der ersten k Würfelwürfe, wobei k zwischen 1 und 1000 variiert werden kann. Was beobachten Sie ?

b) Erstellen Sie die Liste der relativen Häufigkeiten h_k der Augenzahl "6" unter den ersten k Würfen, $k = 1, \ldots, 1000$. Plotten Sie h_k als Funktion von k.

Tragen Sie in den Plot auch die konstante Funktion mit Wert 1/6 ein. Können Sie Ihre Beobachtung aus dem ersten Teil bestätigen ?

(Sie können z.B. die Funktionen **Count**, **ListLinePlot** *und* **Show** *verwenden).*

Hinweise zu den Programmier- und experimentellen Stochastikaufgaben:

Die Bearbeitung der mit "P" gekennzeichneten Programmieraufgaben erfordert Zugang zu Mathematica. Installieren Sie dazu die über die Campuslizenz erhältliche Software auf Ihrem Computer, oder nutzen Sie die CIP-Pools in der Wegelerstr. 6 und in der Endenicher Allee 60. Die CIP-Pool-Tutoren stehen für Beratung und Hilfe bei der Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung.

Speichern Sie die Mathematica Notebooks mit den Lösungen der Übungsaufgaben bitte jeweils als nb- und als pdf-file (im Menue File $\hookrightarrow$ Save as $\hookrightarrow$ Dateityp pdf) mit Namen "NachnameX.nb" und "NachnameX.pdf", wobei Nachname Ihr Familienname, und X die Nummer des Übungsblatts ist. Schicken Sie die Files per E-Mail an Ihren Übungsgruppen-Tutor.

Vor und nach Pfingsten werden wir umfangreichere Programmieraufgaben stellen, die dann im CIP-Pool abzugeben sind.

Kriterien für die Klausurzulassung:

Sie können gerne in Gruppen arbeiten – jeder sollte aber für sich mindestens die Hälfte der gefundenen Lösungen selbstständig aufschreiben. Einzelne Übungsaufgaben können von den Tutoren angenommen oder abgelehnt werden. Die Annahme erfolgt, wenn aus Ihrer Lösung ersichtlich ist, daß Sie sich intensiv mit der Aufgabe beschäftigt haben - Ihre Lösung muß aber nicht unbedingt richtig bzw. vollständig sein ! Bedingungen für die Klausurzulassung:

- Pro Person wurden jeweils 50% der Übungsaufgaben von den Tutoren akzeptiert.
- Pro Gruppe (Gruppengröße maximal 3) wurden mindestens 70% der Übungsaufgaben akzeptiert.
- Mindestens eines der größeren Programmierprojekte wurde von den CIP-Pool-Tutoren akzeptiert.