

0. Übungsblatt „AlMa 2” und „Stochastik (Lehramt)”

Diese Übungsaufgaben werden in den Tutorien in der ersten Woche besprochen (ab Mittwoch). Eine Abgabe der Lösungen ist nicht erforderlich, aber Sie sollten vor den Tutorien selbst versuchen, die Aufgaben zu lösen.

1. (**Kombinatorik 1**) Sieben Jugendliche fahren mit dem Zug zu einem Vergnügungspark.

- Auf der Hinfahrt sind in einem Zugwagen noch genau sieben Plätze frei. Auf wieviele Weisen können sich die Jugendlichen auf die freien Plätze verteilen?
- Für die erste Fahrt mit der Achterbahn im Park ist noch ein Wagen mit vier Plätzen frei. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung dieser vier Plätze?
- Betrachten Sie Teil b) unter einem anderen Blickwinkel: Wieviele Möglichkeiten gibt es, drei Jugendliche zu bestimmen, die nicht bei der ersten Fahrt dabei sind?
- Auf der Rückfahrt sind in einem Zugwagen genau 16 Plätze frei. Auf wieviele Weisen können sich die Jugendlichen auf die freien Plätze verteilen?

2. (**Kombinatorik 2**) Es werden $6n$ faire Würfel geworfen. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass jede Augenzahl genau n mal vorkommt, beträgt

$$\frac{(6n)!}{(n!)^6} \left(\frac{1}{6}\right)^{6n}.$$

3. (**de Méré Paradox**) Welches der folgenden beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:

- mit 4 Würfeln eines fairen Würfels mindestens einmal die 6 zu erhalten,
- mit 24 Würfeln von zwei fairen Würfeln mindestens einmal eine doppelte 6 zu bekommen?

Das Problem stammt von Chevalier de Méré, der mit seinen Spielproblemen und deren Lösungen durch Pascal in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen ist.

4. (**Würfeln**) Ein fairer Würfel wird drei mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Augensumme 9 bzw. 10? Für beide Ereignisse gibt es genau 6 Möglichkeiten:

$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$$

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3,$$

und doch sind die Ereignisse nicht gleich wahrscheinlich!

5. (Münzwürfe 1) Ein Mann besitzt fünf Münzen, zwei davon haben Kopf auf beiden Seiten, eine hat Zahl auf beiden Seiten und zwei sind normale Münzen.

- a) Der Mann wählt mit geschlossenen Augen zufällig eine Münze und wirft sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Unterseite Kopf?
- b) Er öffnet die Augen und sieht, dass die Oberseite Kopf zeigt. Was ist nun die Wahrscheinlichkeit für Kopf auf der Unterseite?
- c) Er schließt die Augen wieder und wirft die Münze erneut. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Unterseite Kopf?
- d) Nachdem er die Augen geöffnet hat, sieht er, dass die Oberseite wieder Kopf zeigt. Wie beeinflusst das die Wahrscheinlichkeit für Kopf auf der Unterseite?
- e) Der Mann legt die Münze beiseite, nimmt zufällig eine andere seiner Münzen, und wirft sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt sie Kopf?

6. (Tennis) Ein Tennisturnier für 2^n Spieler wird nach einem KO-System mit n Runden organisiert. Hierbei ist die letzte Runde das Finale. Zwei Spieler werden zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie sich a) in der ersten oder zweiten Runde, b) im Finale oder Halbfinale, oder c) überhaupt nicht getroffen?

7. (Münzwürfe 2) Maria wirft eine Münze $n + 1$ mal, und Johannes n mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Maria öfter Zahl als Johannes ?

Literatur zur Vorlesung: (Semesterapparat in der Fachbibliothek Mathematik)

- Krengel: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*
- Kersting, Wakolbinger: *Elementare Stochastik*
- Dehling, Haupt: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*
- Grimmett, Stirzaker: *Probability and Random Processes*
- Föllmer, Künsch: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Skript ETH Zürich, <ftp://ftp.stat.math.ethz.ch/Teaching/kuensch/skript-einf.pdf>
- Häggström: *Finite Markov Chains and Stochastic Algorithms*
- Müller-Gronbach, Novak, Ritter: *Monte Carlo-Algorithmen*
- Deuffhard, Hohmann: *Numerische Mathematik*
- Hanke-Burgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*
- Quarteroni, Sacco, Saleri: *Numerical Mathematics*