Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

Probeklausur „Algorithmische Mathematik II”

Hinweise zur Klausur:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen !!!**
- Sie sollten die zentralen Definitionen, Sätze und Beweise kennen. Längere Formeln, Detailaussagen usw. werden bei Bedarf in der Klausur zur Verfügung gestellt oder dort hergeleitet.
- Die Klausur enthält 6 Aufgaben (3 zur Stochastik, 3 zur Numerik), von denen Sie 4 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeiteten Aufgaben, da nur 4 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang ca. 15 Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen, und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten. Es sollte genügend Zeit verbleiben, um die Aufgaben anschließend in Ruhe zu bearbeiten. Sie können die Auswahl der Aufgaben auch schon anhand dieser Probeklausur üben.
- Die Aufgaben dieser Probeklausur sind vom Stil her (aber nicht unbedingt vom Umfang her) ähnlich zu den geplanten Klausuraufgaben.

---

1. (Wahrscheinlichkeitsraum)

a) Was versteht man unter einem Wahrscheinlichkeitsraum ? Geben Sie die Definitionen aller Objekte an, die Sie benötigen.

b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(i) $P\big[A \triangle B\big] = P[A] + P[B] - 2\,P[A \cap B]$

(ii) $P[A \cap B] \geq 1 - P[A^c] - P[B^c]$,

wobei die symmetrische Differenz definiert ist als $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c) Im Sechserpack eines Kakaotrunks sollte an jeder Packung ein Trinkhalm sein, der jedoch mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ fehlt, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ defekt ist und nur mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ gut ist. Sei A das Ereignis ”Mindestens ein Trinkhalm fehlt und mindestens einer ist gut”. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, formulieren Sie das Ereignis A mengentheoretisch, und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

2. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

a) Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P[A|B]$ definiert? Welchen Wert hat $P[A|B]$, wenn A und B unabhängig sind?

b) Sei H_i, $1 \leq i \leq n$, eine disjunkte Zerlegung des Grundraums Ω mit $P[H_i] > 0$ für alle i, und sei $P[A] > 0$. Formulieren und beweisen Sie die Bayessche Regel für $P[H_i|A]$.

c) Eine Gruppe von n Spielern wird mit dem folgenden Verfahren in zwei Mannschaften (rot und blau) unterteilt:

Zunächst wird eine gleichverteilte Zufallszahl X aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ausgewählt.

Dann wird zufällig eine Gruppe von X der n Spieler ausgewählt, die die rote Mannschaft bilden. Die verbleibenden $n - X$ Spieler bilden die blaue Mannschaft.

(i) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Größe der roten Mannschaft.

(ii) Nun betrachten wir einen bestimmten Spieler (A). Bestimmen Sie für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Mannschaft von Spieler A die Größe k hat.

(iii) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Größe der Mannschaft von Spieler A.

(iv) Nachdem die Mannschaften gebildet wurden, wählt jede Mannschaft zufällig einen Kapitän. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung der Größe der Mannschaft von Spieler A, gegeben das Ereignis, daß Spieler A der Kapitän ist.

(Die Formeln $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ können ohne Beweis verwendet werden)

3. (Markovketten)

a) Geben Sie die Definition einer Markovkette an. Was versteht man unter einer Gleichgewichtsverteilung der Markovkette?

b) Wir betrachten eine Sammlung von N Büchern, die in einer Reihe auf einem Bücherregal aufgestellt ist. Zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten wird jeweils ein Buch zufällig entnommen, und anschließend wieder zurückgestellt. Dabei wird das Buch eine Stelle links von seiner vorherigen Position eingefügt (d.h. das Buch und das Buch links daneben tauschen die Position). Wenn das ausgewählte Buch schon ganz links steht, wird es auch dort wieder eingefügt.

Alle bis auf ein Buch haben gelbe Umschläge, und werden mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt. Das verbleibende Buch hat einen roten Umschlag, und wird in jeder Zeiteinheit mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ ausgewählt. Aufeinanderfolgende Bücherauswahlen geschehen unabhängig voneinander.

Wir nummerieren die Positionen auf dem Bücherregal von 1 (ganz links) bis N (ganz rechts). Sei X_n die Position des roten Buchs nach n Zeiteinheiten.

Zeigen Sie, daß X_n eine Markovkette ist, deren nichtverschwindende Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
p_{i,i-1} &= p \qquad (i = 2, 3, \ldots, N), \\
p_{i,i+1} &= (1-p)/(N-1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, N-1), \\
p_{i,i} &= 1 - p - (1-p)/(N-1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, N-1), \\
p_{1,1} &= 1 - (1-p)/(N-1), \\
p_{N,N} &= 1 - p.
\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, dass für die Gleichgewichtsverteilung μ der Markovkette gilt:

$$\mu(2) = \frac{1-p}{p(N-1)}\mu(1) \qquad \text{und} \qquad \mu(3) = \frac{1-p}{p(N-1)}\mu(2).$$

Identifizieren Sie die Gleichgewichtsverteilung.

4. (Iterationsverfahren)

a) Formulieren und beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Sei $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Matrix, und $f \in \mathbb{R}^d$. Wir betrachten die lineare Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} \;=\; Tx^{(k)} + f\,.$$

Zeigen Sie (z.B. mithilfe von a)), daß das Iterationsverfahren monoton bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|_V$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert, falls

$$\|T\|_M \;<\; 1$$

für eine mit $\|\cdot\|_V$ verträgliche Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ gilt.

c) Geben Sie den Algorithmus des Gauß-Seidel-Verfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^d$ an. Zeigen Sie, daß das Verfahren konvergiert, wenn die Matrix A strikt diagonaldominant ist.

5. (Abstiegsverfahren) Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, $b \in \mathbb{R}^d$, $x^* = A^{-1}b$ und

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{2}\langle x, A\,x\rangle - \langle x, b\rangle.$$

a) Zeigen Sie: $\qquad \phi(x) \;=\; \phi(x^*) + \frac{1}{2}\,\langle x - x^*, A\,(x - x^*)\rangle.$

b) Zur näherungsweisen Berechnung des Minimums x^* von ϕ betrachten wir ein Abstiegsverfahren vom Typ

$$x^{(k+1)} \;=\; x^{(k)} + \alpha_k\, p^{(k)}$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{R}$ und $p^{(k)} \in \mathbb{R}^d$. Berechnen Sie die Suchrichtungen $p^{(k)}$ für das Gradienten-Verfahren. Bestimmen Sie zu gegebener Suchrichtung $p^{(k)}$ die Schrittweite α_k, für die der Funktionswert $\phi(x^{(k+1)})$ minimal ist. Zeigen Sie

$$\alpha_k \;=\; \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)}\rangle}{\langle r^{(k)}, A\,r^{(k)}\rangle} \qquad \text{mit } r^{(k)} = b - A\,x^{(k)},$$

und leiten Sie eine Rekursionsformel für die Residuen $r^{(k)}$ her.

Geben Sie den Algorithmus des Gradientenverfahrens an (nur schematisch in Pseudocode - es wird kein lauffähiges Programm erwartet).

c) Fertigen Sie eine Skizze an, die einige Höhenlinien $\{x \mid \phi(x) = const.\}$ der Funktion ϕ und den Verlauf der Iterationsschritte $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, des Gradienten-Verfahrens im $\mathbb{R}^2$ in den folgenden Fällen zeigt:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Verwenden Sie für jede Skizze mindestens eine halbe DIN A4-Seite. Achten Sie darauf, dass aus Ihren Skizzen klar ersichtlich ist, wie der jeweils nächste Iterationswert geometrisch bestimmt wird.

d) Für den Approximationsfehler beim Gradientenverfahren gilt die Abschätzung

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\|_A \;\leq\; \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \cdot \left\| x^{(k)} - x^* \right\|_A ,$$

wobei $K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ die ℓ_2-Kondition der Matrix A ist (Sie können dies ohne Beweis voraussetzen). Berechnen Sie $K_2(A)$ für die beiden Matrizen aus Aufgabenteil c) und interpretieren Sie das Ergebnis. Hierbei können Sie die zur Berechnung benötigten Aussagen ohne Beweis voraussetzen - Sie sollten diese aber angeben.

6. (Interpolation, Approximation, und Quadratur)
Sei $f \in C^{m+1}([a, b])$, $-\infty < a < b < \infty$.

a) Zeigen Sie, dass es zu beliebigen $m + 1$ Knoten $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leq b$ genau ein Polynom p mit Höchstgrad m gibt, so dass

$$p(x_k) \;=\; f(x_k), \qquad k = 0, \ldots, m.$$

b) Zeigen Sie, daß ein $\xi \in (a, b)$ existiert, sodass für den Interpolationsfehler gilt:

$$f(x) - p(x) \;=\; \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_m).$$

c) Wir betrachten nun die stückweise lineare Interpolation $s(x)$ einer Funktion $f \in C^2([a, b])$ bezüglich des Gitters

$$\Delta \;=\; \{a, a + h, a + 2h, \ldots, b\}, \qquad h = (b - a)/n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Leiten Sie (z.B. aus b)) eine gleichmäßige Abschätzung für den Approximationsfehler $|s(x) - f(x)|$ durch die zweite Ableitung von f her.

d) Folgern Sie, daß das Trapezverfahren Konsistenzordnung 2 hat.