Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

2. Klausur zu „Algorithmische Mathematik II”

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben, die Sie alle bearbeiten sollten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten [*28 Pkt.*])

Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer abzählbaren Menge S, und sei $B \subseteq S$ ein Ereignis mit $\mu[B] > 0$.

a) Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mu[A|B]$ eines Ereignisses $A \subseteq S$ gegeben B. Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung $\mu_B[A] := \mu[A|B]$ wieder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S ist. [*5 Pkt.*]

b) Sei H_i, $i \in I$, eine abzählbare Kollektion von disjunkten Ereignissen mit $\bigcup H_i = S$.

(i) Formulieren und beweisen Sie eine Formel zur Berechnung von $\mu[A]$ aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mu[A|H_i]$, $i \in I$. [*4 Pkt.*]

(ii) Formulieren und beweisen Sie die Bayessche Formel. [*3 Pkt.*]

c) Drei Urnen K_1, K_2, K_3 enthalten gut durchmischt schwarze und weiße Kugeln. Es enthalte

K_1: 2 schwarze und 4 weiße Kugeln

K_2: 3 schwarze und 5 weiße Kugeln

K_3: 1 schwarze und 3 weiße Kugeln

Nun wird zunächst eine der Urnen zufällig ausgewählt, aus der dann einmal gezogen wird.

(i) Formulieren Sie ein mathematisches Modell mit Präzisierung des Wahrscheinlichkeitsraums, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine weiße Kugel gezogen wird im Rahmen des Modells. [*5 Pkt.*]

(ii) Wenn die Ziehung eine weiße Kugel liefert, mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde dann im ersten Schritt die zweite Urne ausgewählt ? [*2 Pkt.*]

d) Sei $X_n : \Omega \to S$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilung μ, und sei

$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass T geometrisch verteilt ist mit Parameter $p = \mu[B]$. [*3 Pkt.*]

(ii) Zeigen Sie, daß die Verteilung von X_T gleich der bedingten Verteilung μ_B ist. [*3 Pkt.*]

e) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Stichprobe von der bedingten Verteilung μ_B erzeugt. Dabei können Sie voraussetzen, dass Sie unabhängige Stichproben von der Verteilung μ erzeugen können. Berechnen Sie die mittlere Anzahl von Schritten, die der Algorithmus durchläuft. [*3 Pkt.*]

2. (Varianz, Kovarianz und Gesetz der großen Zahlen [*18 Pkt.*])

a) Definieren Sie die Varianz und Kovarianz zweier diskreter reellwertiger Zufallsvariablen X und Y (mit Voraussetzungen). Zeigen Sie

$$\mathrm{Var}[X+Y] \;=\; \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}[X,Y].$$

[*6 Pkt.*]

b) Ein fairer Würfel hat zwei grüne, zwei rote und zwei blaue Seiten. Der Würfel wird einmal geworfen. Sei $X = 1$, falls eine grüne Seite oben liegt, und $X = 0$ sonst, und sei $Y = 1$ falls eine blaue Seite oben liegt, und $Y = 0$ sonst. Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y. [*4 Pkt.*]

c) Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$P[Y_j = 4^r] \;= 2^{-r} \qquad \text{für alle } j, r \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_n, dass mindestens eine der Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2^n}$ den Wert 4^n hat. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} p_n \;=\; 1 - e^{-1},$$

und folgern Sie

$$P\left[2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} Y_i \geq 2^n\right] \;\not\to\; 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Gesetz der großen Zahlen ? [*8 Pkt.*]

3. (Konvergenz von Fixpunktiterationen [*26 Pkt.*]**)**

a) Geben Sie die Aussage des Banachschen Fixpunktsatzes an (ohne Beweis). [*5 Pkt.*]

b) Sei $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wie ist die ℓ^2-Operatornorm $\|D\phi(x)\|_2$ definiert ? Sei

$$L := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D\phi(x)\|_2.$$

Zeigen Sie: Ist $L < 1$, dann hat ϕ einen eindeutigen Fixpunkt x^*, und die durch $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ definierte Iterationsfolge konvergiert für einen beliebigen Startwert $x^{(0)}$ gegen x^*. [*6 Pkt.*]

c) Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{11}\sin x_1 + \frac{2}{11}\cos x_2 \\ x_2 &= \frac{3}{11}\cos x_1 + \frac{4}{11}\sin x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

eine eindeutige Lösung hat. Geben Sie ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösung an, und schätzen Sie den Approximationsfehler nach n Iterationsschritten explizit ab (Aussagen aus der Vorlesung können hier ohne Beweis vorausgesetzt werden). [*8 Pkt.*]

d) Alternativ kann man das Gleichungssystem (1) auch mit dem Newton-Verfahren lösen. Geben Sie den Iterationsschritt des Newton-Verfahrens für das konkrete Gleichungssystem explizit an. Was können Sie in diesem Fall über die lokale Konvergenzordnung aussagen ? (Begründung unter Verwendung der Aussagen aus der Vorlesung). [*7 Pkt.*]

4. (Interpolation und Quadratur [*12 Pkt.*])

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, eine reellwertige Funktion. Erläutern Sie die folgenden Begriffe in diesem Rahmen, bzw. geben Sie die folgenden Objekte an:

a) Lagrange-Interpolationsproblem zu gegebenen Stützstellen $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$. [*2 Pkt.*]

b) Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms [*2 Pkt.*]

c) Newton-Interpolationsformel [*2 Pkt.*]

d) Abgeschlossene Newton-Cotes Formel auf $[a,b]$ [*2 Pkt.*]

e) Trapezverfahren auf $[a,b]$ [*2 Pkt.*]

f) Konsistenzordnung eines Quadraturverfahrens [*2 Pkt.*]