Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2013
Andreas Eberle, Matthias Erbar / Jan Maas

Klausur zur „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält **5 Aufgaben**, von denen Sie **3 bearbeiten** sollten, darunter **mindestens eine der Aufgaben 4 und 5**. Bitte streichen Sie die nicht bearbeiteten Aufgaben, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 24 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang ca. 15 Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Summe**	**Note**
Punkte							

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung)

In jeder von $n = 24$ Runden eines Würfelspiels werden zwei Würfel geworfen. Ein Spieler gewinnt eine Runde, wenn die Summe beider Augenzahlen 10 beträgt.

a) Beschreiben Sie ein Modell für das Spiel mit n Runden auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nennen Sie die bei der Modellierung gemachten Annahmen, und berechnen Sie *im Rahmen Ihres Modells* die Wahrscheinlichkeit p, dass der Spieler eine bestimmte Runde gewinnt. [*7 Pkt.*]

b) Beschreiben Sie die Gesamtzahl der vom Spieler gewonnenen Runden durch eine Zufallsvariable S. Geben Sie die Verteilung von S an (mit kurzer Begründung), und berechnen Sie den Erwartungswert $E[S]$.

Skizzieren Sie die Massenfunktion von S. [*6 Pkt.*]

c) Beschreiben Sie den Zeitpunkt des ersten Gewinns durch eine Zufallsvariable

$$T : \Omega \to \{1, 2, \dots, 24\} \cup \{\infty\},$$

wobei $T = \infty$ bedeutet, dass der Spieler in keiner der 24 Runden gewinnt. Berechnen Sie die Verteilung von T.

Zeigen Sie, dass die Verteilung der Wartezeit T_3 auf den dritten Gewinn gegeben ist durch

$$P[T_3 = k] \;=\; \binom{k-1}{2} p^3 (1-p)^{k-3} \qquad \text{für } k = 3, 4, \dots, 24.$$

[*6 Pkt.*]

d) Beweisen Sie die Identität

$$E[T \cdot I_{\{T<\infty\}}] \;=\; \sum_{k=1}^{24} P[T \geq k] \;-\; 24 \cdot P[T = \infty].$$

Berechnen Sie diesen Erwartungswert. [*5 Pkt.*]

2. (Mittelwerte und Varianz)

Ein Würfel wird n mal geworfen. Die Summe der Augenzahlen aus den n Würfen werde durch die Zufallsvariable Y_n beschrieben.

a) Definieren Sie den Erwartungswert und die Varianz einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable. Zeigen Sie $E[Y_n] = 7n/2$ und $\operatorname{Var}[Y_n] = 35n/12$. Geben Sie alle dabei verwendeten Annahmen explizit an. [*10 Pkt.*]

b) Formulieren und beweisen Sie die Čebyšev-Ungleichung für eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^2$. Bestimmen Sie ein n mit

$$P\left[\left|\frac{Y_n}{n} - 3.5\right| > 0.1\right] \;\leq\; 0.1.$$

[*9 Pkt.*]

c) Das Würfelspiel werde nach einer zufälligen Anzahl N von Runden beendet. Wir nehmen an, dass N unabhängig von den Augenzahlen der Würfelwürfe ist mit Erwartungswert $E[N] = 20$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Summe Y_N aller Augenzahlen. [*5 Pkt.*]

3. (Gleichgewichte von Markovketten)

a) Geben Sie die Definition einer (zeitlich homogenen) Markovkette mit Übergangsmatrix p an. Was versteht man unter einer Gleichgewichtsverteilung der Markovkette?

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf dem endlichen Zustandsraum S erfülle die Detailed Balance Bedingung

$$\mu(x)p(x,y) \;=\; \mu(y)p(y,x) \qquad \text{für alle } x,y \in S.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Gleichgewicht von p ist. [*7 Pkt.*]

b) Sei (V, E) ein endlicher 3-regulärer Graph, d.h. jeder Knoten hat genau 3 Nachbarn.

(i) Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten des Random Walks auf dem Graphen an, und zeigen Sie, dass die Gleichverteilung auf V ein Gleichgewicht ist. [*3 Pkt.*]

(ii) Sei μ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf V mit $\mu(x) > 0$ für alle $x \in V$. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Markovkette mit Gleichgewicht μ simuliert, welche in jedem Schritt nur zu Nachbarn des vorherigen Zustands wechselt. Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette an, und zeigen Sie, dass μ ein Gleichgewicht ist. [*8 Pkt.*]

c) Ein Experiment werde durch eine Markovkette mit zwei Zuständen r und s, und der Übergangsmatrix

$$p \;=\; \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

mit dem unbekannten Parameter $0 \leq q \leq 1$ beschrieben. Das Experiment wird viele Male für jeweils lange Zeit ausgeführt, und man beobachtet, dass der Ausgang in 20 % der Fälle durch den Zustand r, und in den restlichen 80 % der Fälle durch s beschrieben wird. Bestimmen Sie den Parameter p. [*6 Pkt.*]

4. (Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine invertierbare Matrix mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, d$, und sei $b = (b_i) \in \mathbb{R}^d$.

a) Geben Sie die Algorithmen des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax \;=\; b \tag{1}$$

an (nur schematisch in Pseudo-Code). Zeigen Sie, daß die eindeutige Lösung x^* von (1) ein Fixpunkt der verwendeten Iterationen ist. [*6 Pkt.*]

b) Stellen Sie die in den Algorithmen durchgeführten Iterationen jeweils in der Form

$$x^{(k+1)} \;=\; Tx^{(k)} + f \tag{2}$$

mit $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $f \in \mathbb{R}^d$ dar. Geben Sie die Iterationsmatrizen T_J und T_{GS} für das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren an. [*6 Pkt.*]

c) Wie ist der Spektralradius $\rho(T)$ einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ definiert?

Zeigen Sie: Ist $\rho(T) > 1$, dann konvergiert die durch (2) definierte Iterationsfolge $x^{(k)}$ nicht für jeden Startwert gegen die Lösung x^* des Gleichungssystems (1). [*6 Pkt.*]

d) Untersuchen Sie die Konvergenz des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens in den folgenden Fällen:

$$(i) \quad A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei können Aussagen aus der Vorlesung vorausgesetzt werden - die verwendeten Aussagen sollten aber mit Voraussetzungen angegeben werden. [*6 Pkt.*]

5. (Interpolation)

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^{m+1}([a,b])$, $-\infty < a < b < \infty$.

a) Zeigen Sie, dass es zu beliebigen $m+1$ Knoten $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_m \le b$ genau ein Polynom p mit Höchstgrad m gibt, so dass

$$p(x_k) \;=\; f(x_k) \qquad \text{für alle } k = 0, 1, \ldots, m \text{ gilt.}$$

[*7 Pkt.*]

b) Für $0 \le i \le k \le m$ sei $p_{i,k}$ das Interpolationspolynom mit Höchstgrad $k-i$ zu den Stützstellen $x_i, \ldots, x_k$. Beweisen Sie die Rekursionsformel

$$p_{i,k}(x) \;=\; \frac{(x-x_i)p_{i+1,k}(x) - (x-x_k)p_{i,k-1}(x)}{x_k - x_i} \qquad \text{für } i < k.$$

[*5 Pkt.*]

c) Geben Sie einen Algorithmus zur Berechnung von $p(x)$ für einen festen Wert $x \in [a,b]$ an (in Pseudo-Code). [*4 Pkt.*]

d) Berechnen Sie das quadratische Interpolationspolynom für die Funktion $f(x) = \cos x$ und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$ und $x_2 = \pi/2$

(i) auf direkte Weise in der Form $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, [*3 Pkt.*]

(ii) in der Lagrange-Darstellung, sowie [*2 Pkt.*]

(iii) mit dem Algorithmus aus c). [*3 Pkt.*]