Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2009
Andreas Eberle, Martin Slowik

Klausur zur „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 6 Aufgaben (3 zur Stochastik, 3 zur Numerik), von denen Sie 4 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeiteten Aufgaben, da nur 4 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 20 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang ca. 15 Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Urnenmodelle)

Eine Urne enthält m Kugeln, darunter g gelbe. In jedem von n Schritten wird eine zufällig ausgewählte Kugel aus der Urne gezogen, und anschließend wieder zurückgelegt. Die Zufallsvariable X_i habe den Wert 1, wenn die i-te gezogene Kugel gelb ist, und 0 sonst.

a) Beschreiben Sie ein entsprechendes Modell auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Berechnen Sie $P[X_1 = 1]$ und $P[X_1 = 1 \text{ und } X_2 = 1]$. *[5 Pkt.]*

b) Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die Anzahl der gelben Kugeln, wenn n Kugeln nacheinander gezogen wurden. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[S_n]$ und die Varianz $\mathrm{Var}(S_n)$; zum Beispiel indem Sie $E[S_n]$ und $E[S_n^2]$ betrachten. *[4 Pkt.]*

c) Geben Sie die Čebyšev-Ungleichung an (ohne Beweis), und beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen für die Zufallsvariablen S_n/n. *[4 Pkt.]*

d) Das Zufallsexperiment von oben wird wiederholt, aber jetzt werden entnommene Kugeln nicht mehr zurückgelegt, und es gelte $n \leq m$. Bearbeiten Sie Aufgabenteil a) für das neue Zufallsexperiment. Sei $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die neue Anzahl von gelben Kugeln. Berechnen Sie $E[Z_n]$, und zeigen Sie *[7 Pkt.]*

$$\mathrm{Var}\big(Z_n\big) \;=\; \frac{m-n}{m-1}\,\mathrm{Var}\big(S_n\big).$$

2. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

a) Definieren Sie die Begriffe *Wahrscheinlichkeitsraum* und *bedingte Wahrscheinlichkeit.* *[5 Pkt.]*

b) Seien A und B Ereignisse mit $P[B] \in (0,1)$. Folgern Sie aus den Definitionen: *[4 Pkt.]*

$$P\big[A\big] \;=\; P\big[A \,\big|\, B\big] \cdot P\big[B\big] + P\big[A \,\big|\, B^c\big] \cdot P\big[B^c\big].$$

Welche entsprechenden Aussagen gelten im Fall $P[B] = 0$ bzw. $P[B] = 1$?

c) Eine Zufallsfolge von Binärzahlen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ wird wie folgt rekursiv erzeugt:

$X_0 = 0$

for $n \geq 1$ **do**

if $X_{n-1} = 1$ **then** $X_n = 0$ **else** $X_n = Z_n$ **end if**

end for

Hierbei sei die Zufallsvariable Z_n unabhängig von $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ mit $P[Z_n = 1] = P[Z_n = 0] = 1/2$.

(i) Sei $p_n = P[X_n = 1]$. Zeigen Sie: $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,p_{n-1}$. *[3 Pkt.]*

(ii) Konvergiert die Folge p_n für $n \to \infty$? Falls ja, berechnen Sie den Grenzwert. *[2 Pkt.]*

(iii) Zeigen Sie: $P[X_1 = 1 \text{ und } X_3 = 1] = 1/4$. *[2 Pkt.]*

(iv) Berechnen Sie $P[X_1 = 1 \,|\, X_3 = 1]$. *[2 Pkt.]*

(v) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$. *[2 Pkt.]*

3. (Gleichgewichte von Markovketten)

a) Geben Sie die Definition einer (zeitlich homogenen) Markovkette an. Was versteht man unter einer Gleichgewichtsverteilung der Markovkette? [*6 Pkt.*]

b) Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit positiven Gewichten $\mu(x) > 0$ auf einer endlichen Menge S und $q(x, y)$, $x, y \in S$, eine symmetrische stochastische Matrix. [*6 Pkt.*]

Angenommen, Sie können beliebig viele unabhängige Stichproben von den Wahrscheinlichkeitsverteilungen q_x mit Gewichten $q(x, y)$, $y \in S$, erzeugen. Geben Sie einen Algorithmus an, der den Übergangsschritt $x \to y$ einer Markovkette mit Gleichgewichtsverteilung μ durchführt. Wie lautet die Übergangsmatrix der entsprechenden Markovkette?

c) Wir betrachten das folgende einfache Modell für das zufällige Wachstum einer Population:

Sei X_n die Anzahl der Individuen zur Zeit n, $n = 0, 1, \ldots$. Es gelte $X_0 = 0$. Für $n = 1, 2, \ldots$ passiert im n-ten Schritt folgendes:

- Ist $X_{n-1} > 0$, dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ eine Pandemie, die die Population vernichtet, d.h. $X_n = 0$; anderenfalls immigriert ein neues Individuum, d.h. $X_n = X_{n-1} + 1$.
- Ist $X_{n-1} = 0$, dann gibt es immer einen Immigranten, und $X_n = 1$.

Die Ereignisse, die das Auftreten von Pandemien zu verschiedenen Zeitpunkten beschreiben, seien unabhängig voneinander.

(i) Geben Sie den Zustandsraum und die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette (X_n) an. [*3 Pkt.*]

(ii) Bestimmen Sie eine Gleichgewichtsverteilung, und zeigen Sie, dass diese eindeutig ist. [*5 Pkt.*]

4. (Newton-Verfahren)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Geben Sie den Algorithmus des Newton-Verfahrens zur Approximation einer Nullstelle x^* der Funktion f an (nur schematisch in Pseudocode - es wird kein lauffähiges Programm erwartet). Der Algorithmus sollte abbrechen, wenn die Iterationsfolge $x^{(k)}$ ein vorgegebenes Intervall $I = (-M, M)$, $M \in \mathbb{R}_+$, verlässt (*overflow*), oder wenn $|f(x^{(k)})|$ eine vorgegebene Schranke $\varepsilon > 0$ unterschreitet. *[5 Pkt.]*

b) Was bedeutet *"quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens"* (Definition)? Geben Sie eine Nullfolge reeller Zahlen an, die quadratisch, aber nicht mit höherer Ordnung konvergiert (mit Beweis). *[5 Pkt.]*

c) Sei $x^* \in I$ mit $f(x^*) = 0$. Es gelte $f'(x) > 0$ für alle $x \in [-M, M]$.

   (i) Zeigen Sie: Für $k \geq 0$ mit $x^{(k)} \in I$ gilt *[3 Pkt.]*

$$x^{(k+1)} - x^* \;=\; \frac{1}{f'(x^{(k)})} \int_{x^{(k)}}^{x^*} \Big(f'(y) - f'(x^{(k)}) \Big)\, dy.$$

   (ii) Folgern Sie: Existiert ein $L \in \mathbb{R}_+$ mit *[3 Pkt.]*

$$\big|f'(y) - f'(x)\big| \;\leq\; L \cdot \big|y - x\big| \qquad \text{für alle } x, y \in I,$$

   dann konvergiert die Iterationsfolge $x^{(k)}$ für $x^{(0)}$ nahe x^* quadratisch gegen x^*.

d) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Newton-Verfahren im allgemeinen nicht global konvergiert. *[4 Pkt.]*

5. (Abstiegsverfahren)
Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, $b \in \mathbb{R}^d$, $x^* = A^{-1}b$ und

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{2}\langle x, A\,x\rangle - \langle x, b\rangle.$$

a) Zeigen Sie: *[2 Pkt.]*

$$\phi(x) \;=\; \phi(x^*) + \frac{1}{2}\,\langle x - x^*, A\,(x - x^*)\rangle.$$

b) Zur näherungsweisen Berechnung des Minimums x^* von ϕ betrachten wir ein Abstiegsverfahren vom Typ *[8 Pkt.]*

$$x^{(k+1)} \;=\; x^{(k)} + \alpha_k\, p^{(k)}$$

   mit $\alpha_k \in \mathbb{R}$ und $p^{(k)} \in \mathbb{R}^d$. Berechnen Sie die Suchrichtungen $p^{(k)}$ für das Gradienten-Verfahren (Verfahren des steilsten Abstiegs). Bestimmen Sie zu gegebener Suchrichtung $p^{(k)}$ die Schrittweite α_k, für die der Funktionswert $\phi(x^{(k+1)})$ minimal ist. Zeigen Sie

$$\alpha_k \;=\; \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)}\rangle}{\langle r^{(k)}, A\,r^{(k)}\rangle} \qquad \text{mit } r^{(k)} = b - A\,x^{(k)},$$

und leiten Sie eine Rekursionsformel für die Residuen $r^{(k)}$ her.

Geben Sie den Algorithmus des Gradientenverfahrens an (nur schematisch in Pseudocode - es wird kein lauffähiges Programm erwartet).

c) Fertigen Sie eine Skizze an, die einige Höhenlinien $\{x \mid \phi(x) = \mathit{const.}\}$ der Funktion ϕ und den Verlauf der Iterationsschritte $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, des Gradienten-Verfahrens im $\mathbb{R}^2$ in den folgenden Fällen zeigt: *[6 Pkt.]*

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Verwenden Sie für jede Skizze mindestens eine halbe DIN A4-Seite. Achten Sie darauf, dass aus Ihren Skizzen klar ersichtlich ist, wie der jeweils nächste Iterationswert geometrisch bestimmt wird.

d) Für den Approximationsfehler beim Gradientenverfahren gilt die Abschätzung *[4 Pkt.]*

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\|_A \;\leq\; \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \cdot \left\| x^{(k)} - x^* \right\|_A ,$$

wobei $K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ die ℓ_2-Kondition der Matrix A ist (Sie können dies ohne Beweis voraussetzen). Berechnen Sie $K_2(A)$ für die beiden Matrizen aus Aufgabenteil c) und interpretieren Sie das Ergebnis. Hierbei können Sie die zur Berechnung benötigten Aussagen ohne Beweis voraussetzen - Sie sollten diese aber angeben.

6. (Interpolation und Quadratur)

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^{m+1}([a, b])$, $-\infty < a < b < \infty$.

a) Zeigen Sie, dass es zu beliebigen $m + 1$ Knoten $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leq b$ genau ein Polynom p mit Höchstgrad m gibt, so dass *[5 Pkt.]*

$$p(x_k) \;=\; f(x_k), \qquad \text{für alle } k = 0, 1, \ldots, m \text{ gilt.}$$

b) Geben Sie die Interpolationspolynome L_i für $i = 0, 1, \ldots, m$ mit $L_i(x_i) = 1$ und $L_i(x_k) = 0$ für alle $k \neq i$ an. Stellen Sie das Polynom p aus Aufgabenteil a) als Linearkombination der L_i dar (mit Beweis). *[6 Pkt.]*

c) Geben Sie die abgeschlossene Newton-Cotes-Formel mit $m + 1$ Stützstellen für das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ an. Zeigen Sie, dass es sich um eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad $\geq m$ handelt. *[5 Pkt.]*

d) Berechnen Sie die Gewichte der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formel im Fall $m = 2$, und bestimmen Sie den maximalen Exaktheitsgrad dieser Quadraturformel (mit Beweis). *[4 Pkt.]*